A Matemática do Ensino Médio, vol. 1

Exercícios do Capítulo 8 (Funções Exponenciais e Logarítmicas)

1. Com um lápis cuja ponta tem 0,02 mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

Solução: Podemos admitir que a ponta do lápis é um disco com raio de 0,01 mm. O gráfico tocará o eixo horizontal num ponto $(x, 2^x)$ sempre que $2^x < 0,001$ mm, ou seja quando $x \cdot \log 2 < \log 0,01$, donde $x < \log 0,01/\log 2 = -\log 100/\log 2$. Tomando logaritmos de base 10, temos $\log 100 = 2$ e $\log 2 = 0,301$. Então o gráfico tocará o eixo horizontal nos pontos de abcissa $x < -6,644$ mm.

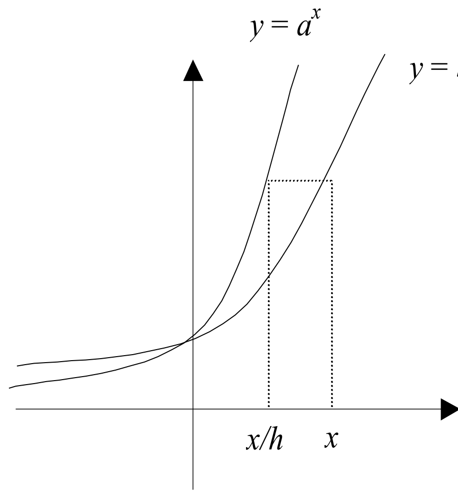
2. Seja $f(b,t)$ uma função positiva, definida para $b \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, linear em b crescente (ou decrescente) em t, tal que $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$ para quaisquer b, s, t. Prove que f é de tipo exponencial.

Solução: Ponhamos $\varphi(t) = f(1,t)$. Então φ é estritamente monótona e $\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s),t) = f(f(1,s) \cdot 1, t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$. Pelo Teorema de Caracterização da Função Exponencial (M.E.M. vol. 1, pag. 183) segue-se que, pondo $a = \varphi(1) = f(1,1)$, tem-se $f(1,t) = \varphi(t) = a^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí $f(b,t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot a^t$.

3. Dados $a > 0$ e $b > 0$, ambos diferentes de 1, qual a propriedade da função exponencial que assegura a existência de $h \neq 0$ tal que $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Mostre como obter o gráfico de $y = b^x$ a partir do gráfico de $y = a^x$. Use sua conclusão para traçar o gráfico de $y = \left(1/\sqrt[3]{4}\right)^x$ a partir do gráfico de $y = 2^x$.

Solução: A propriedade em questão diz que a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = b^x$, é sobrejetiva. Portanto, dado $a > 0$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $b^h = a$, ou seja,

$b = a^{1/h}$. Daí $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Para obter o gráfico de $y = b^x$, trace a reta horizontal que passa pelo ponto de abcissa x/h no gráfico de $y = a^x$. O ponto dessa reta que tem abcissa x é (x, b^x). Quando $a = 2$ e $b = 1/\sqrt[3]{4}$, a igualdade $a^{x/h} = b^x$, que equivale a $h = \log a / \log b$, nos dá $h = -3/2$ e $x/h = -2x/3$.

4. Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois dos seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

Solução: Se $ba^{x_1} = BA^{x_1}$ e $ba^{x_2} = BA^{x_2}$ então $(a/A)^{x_1} = B/b = (a/A)^{x_2}$. Como $x_1 \neq x_2$, isto obriga $a/A = 1$, ou seja, $a = A$. Então $bA^{x_1} = BA^{x_1}$, logo $b = B$.

5. Dados $x_0 \neq 0$ e $y_0 > 0$ quaisquer, mostre que existe $a > 0$ tal que $a^{x_0} = y_0$.

Solução: Basta tomar $a = y_0^{1/x_0}$.

6. Dados $x_0 \neq x_1$ e y_0, y_1 não-nulos e de mesmo sinal, prove que existem $a > 0$ e b tais que $b \cdot a^{x_0} = y_0$ e $b \cdot a^{x_1} = y_1$.

Solução: Basta tomar $a = \big(y_0/y_1\big)^{\frac{1}{x_0 - x_1}}$ e $b = y_0 \cdot a^{-x_0}$.

7. A grandeza y se exprime como $y = b \cdot a^t$ em função do tempo t. Sejam d o acréscimo que se deve dar a t para que y dobre e m (meia-vida de y) o acréscimo de t necessário para que y se reduza à metade. Mostre que $m = -d$ e $y = b \cdot 2^{t/d}$, logo $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$.

Solução: Deve-se ter $b \cdot a^d = 2b$, portanto $a^d = 2$, donde $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$. **Observação**: geralmente m (e, equivalentemente, d) é conhecido experimentalmente, enquanto a se obtém a partir de m: de $a^d = 2$, ou seja, $a^{-m} = 2$, resulta que $a = 2^m$. Assim a expressão de y em função de t fica $y = b \cdot 2^{mt}$, onde b é o valor inicial de y (correspondente a $t = 0$).

8. Observações feitas durante longo tempo mostram que, após período de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se:

(a) O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor.

(b) A população estimada para o ano 2012.

(c) Em que ano a população da terra era de 1 bilhão.

Solução: (a) As observações indicam que se b é a população num determinado ano e t é o número de anos decorridos a partir daí então a população após esses t anos é dada por uma expressão do tipo $y = b \cdot e^{at}$. Começando a contar os anos a partir de 1956, temos $b = 2,68$ bilhões. Para determinar o coeficiente a, usaremos a observação de 1972, segundo a qual se tem $2,68e^{16a} = 3,78$ (lembrando que $t = 1972 - 1956 = 16$. Portanto $e^{16a} = 3,78 \div 2,68 = 1,41$. Daí $a = (\log 1,41) \div 16 = 0,0215$. O tempo necessário para que a população dobre é o número t de anos tal que $e^{0,0215t} = 2$. Daí vem

$t = (\log 1) \div 0,0215 = 32,24$ anos, aproximadamente 32 anos e 3 meses.

(b) Em 2012 teremos $t = 2012 - 1956 = 56$, portanto $2,68\, e^{0,0215 \cdot 56} = 8,9$ bilhões será a população da terra.

(c) A população da terra era de 1 bilhão quando $2,68 \cdot e^{0,0215t} = 1$, donde $e^{0,0215t} = 1 \div 2,68 = 0,373$. Isto nos dá $0,0215t = \log 0,373$ portanto $t = -45,87 = -(45$ anos e 10 meses). Isto ocorreu em 1910.

Observação: Usamos logaritmos naturais.

9. Dê um argumento independente de observações para justificar que, em condições normais, a população da terra após o decurso de períodos iguais fica multiplicada pela mesma constante.

Solução: Por "independente de observações" deve-se entender sem coleta de dados estatísticos, ou seja, um argumento baseado na reflexão. "Em condições normais" significa que não ocorreram repetidas catástrofes nem houve a descoberta do elixir da imortalidade. Então, se começarmos a contar os anos a partir de quando a população da terra era de b bilhões de pessoas, indicaremos com $f(b,t)$ a população após o decurso de t anos. A primeira constatação que fizemos é que $f(b,t)$ depende linearmente de b. Com efeito, é claro que $f(b,t)$ é função crescente de b. Em seguida, notamos que $f(n \cdot b, t) = n \cdot f(b,t)$ como se vê ao imaginarmos n planetas exatamente iguais à terra, cada um deles com b bilhões de pessoas no mesmo ano $t = 0$. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos garante então que $f(b,t)$ depende linearmente de t. Finalmente, temos $f(f(b,s),t) = f(b,s+t)$ pois esta igualdade significa que, se começarmos a contar os anos a partir do ano s, quando a população seria de $f(b,s)$ bilhões, após decorridos t anos a população será de $f(f(b,s),t)$ bilhões, a mesma que obteríamos se tivéssemos considerado a população de b bilhões, quando $s = t = 0$, e olhássemos para essa população após $s+t$ anos, quando seu valor seria $f(b,s+t)$. Portanto $f(f(b,s),t) = f(b,s+t)$. Pelo Exercício 2, vemos que $f(b,t)$ é do tipo exponencial.