A Matemática do Ensino Médio – vol. 2
Soluções do Cap. 10

1) Se A = 20 e V = 10 então, pela relação de Euler, F = 12. Se x é o número de faces triangulares temos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 \quad \Rightarrow \quad 40 = 3x + 4(12 - x)$$

o que dá $x = 8$.
O poliedro possui 8 faces triangulares e 4 quadrangulares.

2) Unindo cada par de vértices por um segmento, obtemos $C_{12}^2 = 66$ segmentos. Subtraindo as arestas, todos os outros segmentos são diagonais porque as faces do icosaedro são triangulares. Logo, o número de diagonais do icosaedro é 66 – 30 = 36.

3) Do ítem 10.3 do texto, sabemos que valem as desigualdades: $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$. Da relação de Euler temos:

$$A + 2 = F + V$$
$$3A + 6 = 3F + 3V \leq 3F + 2A.$$

Daí, $A + 6 \leq 3F$ e a outra é análoga.

4) Reunindo a desigualdade do ítem 10.3 com a do exercício anterior temos que $A + 6 \leq 3F \leq 2A$. Se A = 10 então $16 \leq 3F \leq 20$ e, portanto, F = 6.

5) Já sabemos, pelo exercício anterior que um poliedro com 10 arestas possui 6 faces. No ítem 10.3 do texto, encontramos a seguinte igualdade: $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \ldots$. Logo, $F_4 + 2F_5 + \ldots = 2$. Porém, isto só é possível em dois casos:
a) $F_4 = 2$, $F_5 = F_6 = \ldots = 0$ e, portanto, $F_3 = 4$.
b) $F_5 = 1$, $F_4 = F_6 = \ldots = 0$ e, portanto, $F_3 = 5$.
Existem poliedros de dois tipos: um com duas faces quadrangulares e quatro triangulares e outro com uma face pentagonal e cinco triangulares e o leitor poderá facilmente fazer os desenhos.

6) Sejam V', A' e F' os números de vértices, arestas e faces do poliedro P'. Observe que os vértices de P' são também vértices de P. Além disso, P' tem um vértice sobre cada face de P. Logo,
$V' = V + F$.
É claro que P' tem apenas faces triangulares e cada aresta de P é lado de exatamente duas faces de P'. Logo,
$F' = 2A$.
As arestas de P são também arestas de P'. Além disso, P' tem arestas novas, que são as arestas laterais das pirâmides. Em cada pirâmide, o número de arestas laterais é igual ao número de lados de sua base (uma face de P). Assim o número de arestas novas é 2A e, portanto,
$A' = A + 2A = 3A$.
OBS:

O poliedro P′ satisfaz a relação de Euler pois
A′ + 2 = 3A + 2 = 2A + A + 2 = 2A + F + V = F′ + V′.

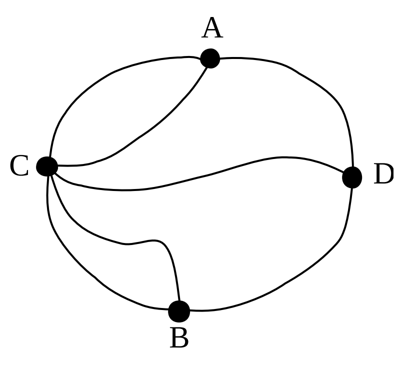
7) No lugar de cada vértice do cubo apareceu uma face triangular. Logo, F_3 = 8. Além disso, cada face do cubo deu origem a uma face octogonal. Logo, F_8 = 6.
O poliedro tem portanto 14 faces, 24 vértices (dois em cada aresta do cubo original) e, consequantemente, 36 arestas.
Unindo cada par de vértices de P por um segmento, obtemos $C_{24}^{2} = 276$ segmentos. Entretanto, existem 36 desses segmentos que são arestas e outros que são diagonais das faces octogonais (e não são diagonais de P). Cada octógono possui 20 diagonais e, portanto, existem 6×20 = 120 segmentos que estão sobre as faces de P (e não são arestas). Logo, o número de diagonais de P é 276 – 36 – 120 = 120.

8) Se P tem todas as arestas iguais então cada face octogonal, recortada de uma face quadrada do cubo original é regular. Seja *x* o comprimento dos catetos de cada triângulo que foi retirado de uma face quadrada. Assim, cada aresta de P é igual a $x\sqrt{2}$ e, portanto, $x + x\sqrt{2} + x = a$, o que dá
$$x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$$

9) Temos F = 14. Se em cada vértice incidem 3 arestas então 2A = 3V. Por outro lado, a relação de Euler fornece A = 12 + V. Daí decorre que V = 24 e A = 36.
temos portanto 36 linhas de fronteira na América do Sul.
Observações:
a) Como o oceano é um "país", o litoral de cada país é, neste problema, uma linha de fronteira.
b) Não se considerou a fronteira da Colômbia com o Panamá. Tudo o que está fora da América do Sul se chamou *oceano*.
c) Como o enunciado afirma que não existe pobnto comum a mais de três países, estabelecemos um vértice onde o rio Uruguai desemboca no rio da Prata (já oceano).
d) Ignoramos a Terra do Fogo pela sua complicação geográfica.

10) Não é possível. Para mostrar isto imaginemos que as ligações sejam possíveis. Fica formado então um poliedro plano com 6 vértices e 9 arestas. Logo, esse poliedro terá 5 faces. Observe que esse poliedro não pode ter face triangular pois não há ligações entre duas casas nem entre dois terminais. Portanto, cada face (região) é, no mínimo, quadrangular. Ora, mas desta forma, o número de arestas será, no mínimo 10, o que é uma contradição.

11) Consideremos um ponto na margem de cima (A), outro na margem de baixo (B) e um em cada ilha (C e D). Todos os caminhos possíveis formam o grafo abaixo.



Como em cada vértice incidem um número ímpar de arestas, não é possível percorrer todas as arestas uma única vez.

Observação:

Para que um grafo possa ser inteiramente percorrido sem passar duas vezes pela mesma aresta é necessário e suficiente que seus vértices tenham gênero par ou que, no máximo, apenas dois vértices tenham gênero ímpar (os pontos inicial e final do percurso).

12) Não, pelo que foi dito acima.

13) Sejam as pessoas, vértices de um grafo. Vamos ligar cada par de pessoas por uma linha cheia, caso se conheçam, ou uma linha tracejada, caso se desconheçam. De cada vértice do grafo partem 5 linhas e é claro que destas linhas existem pelo menos 3 do mesmo tipo. Assim, imaginemos três linhas cheias saindo do ponto A do grafo, em direção aos pontos B, C e D.

Se algum lado do triângulo BCD for cheio então existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente.

Se não, todos os lados do triângulo BCD são tracejados e existem 3 pessoas que se desconhecem.