Soluções do Capítulo 7 (Volume 2)

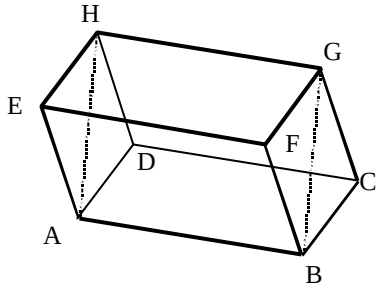
1. Supondo que, neste trecho, tanto a ponte quanto a via férrea estejam em planos horizontais (sem rampa), temos as seguintes relações: α e β são paralelos; r está contida em α e é paralela a β, enquanto s está contida em β e é paralela a α; r e s são reversas.

   É possível também que os planos das duas estradas não sejam paralelos (por exemplo, se a estrada estiver no plano horizontal mas a ferrovia estiver em um trecho de rampa). Neste caso, temos as seguintes relações: α e β são secantes; r está contida em α e é secante a β, enquanto s está contida em β e é secante a α; r e s são reversas.

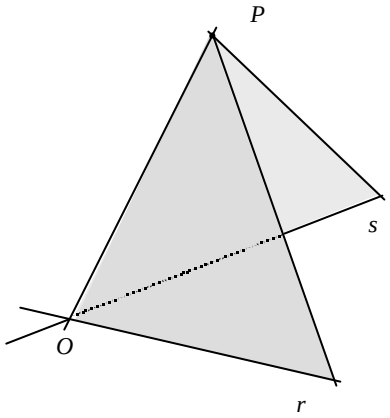
2. Cada 3 pontos determinam um plano. Logo, há um total de $C_4^3 = 4$ planos (que correspondem às faces do tetraedro cujos vértices são estes 4 pontos).

3. Há planos de dois tipos: faces do paralelepípedo, planos determinados por duas arestas paralelas opostas e planos determinados por três vértices que não determinam nenhuma aresta. São 6 planos do primeiro tipo (já que são 6 faces), 6 do segundo (já que há 6 pares de arestas opostas) e 8 do terceiro (um para cada vértice do cubo), para um total de 20 planos. Outra solução: cada 3 vértices determinam um plano, para um total de $C_8^3 = 56$ planos. No entanto, 12 destes planos contêm 4 vértices: as 6 faces e os 6 planos deteminados por duas arestas opostas. Estes são, portanto, contados 4 vezes cada. Logo, dos 56 planos devem ser descontados $12 \times 3 = 36$ planos , resultando em $56 - 36 = 20$ planos.

4. O plano determinado por AB e G contém a reta passando por G e paralela a AB; portanto, ele contém a aresta GH, oposta a AB. Logo, a seção é o paralelogramo determinado por estas duas arestas.



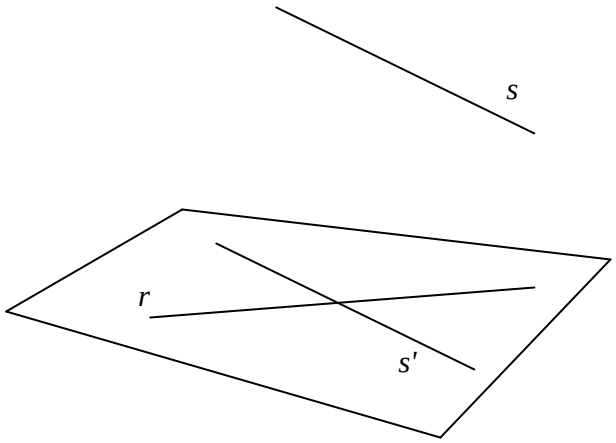
5. Os pontos O e P são comuns aos dois planos. Logo, sua interseção é a reta definida por estes dois pontos.



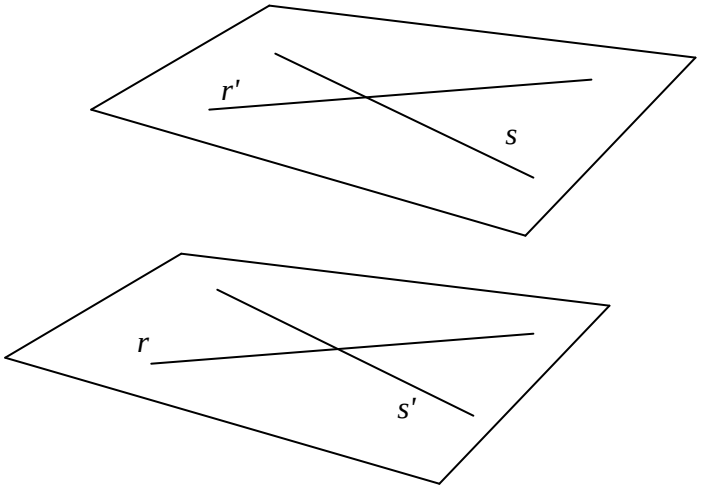
6. O ponto A pertence tanto a α (já que $A \in r$) quanto a β (que é definido passando por A). Do mesmo modo, B também pertence a α e β. Logo, a interseção dos dois planos (que são distintos) é justamente a reta definida por A e B.

7. Se as retas AC e BD fossem coplanares, isto significaria que os pontos A, B, C e D seriam coplanares, ou seja, as retas r e s seriam coplanares, o que contradiz o fato de serem reversas. Logo, AC e BD são reversas.

8. a) Basta conduzir uma reta s' paralela a s por um ponto qualquer de r; o plano definido por r e s' contém r e é paralelo a s, já que contém uma reta paralela a s.



b) Basta repetir a construção acima trocando o papel de r e s; o novo plano e o obtido em a) contêm s e r, respectivamente, e são paralelos, por possuírem, cada um, um par de retas concorrentes paralelas ao outro.

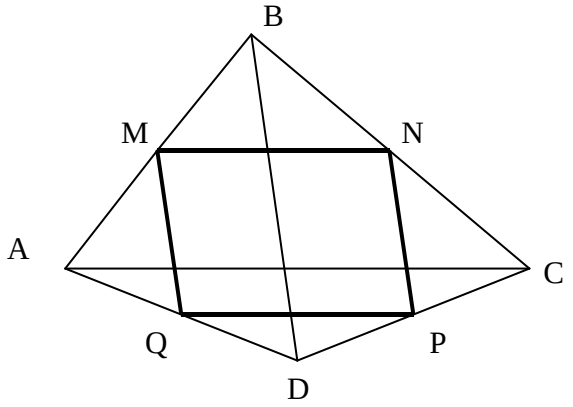


c) Basta tomar o plano definido por r e P, que encontra s no ponto Q. A reta PQ encontra r e s. (É necessário supor que o ponto P não está em nenhum dos dois planos obtidos em b))

9. Sim. Se P pertence a r, há uma infinidade de retas nestas condições (todas as retas passando por P do plano conduzido por P e paralelo a α). Se P não pertence a r, existe exatamente uma reta cumprindo as condições dadas, obtida conduzindo por P um plano paralelo a α, que intersecta r em Q; a reta PQ é a reta pedida.

10. Errado. Dois planos secantes são paralelos a uma reta paralela à sua reta de interseção, conduzida por um ponto exterior a ambos.

11. No triângulo ABC, MN liga os pontos médios dos lados AB e BC. Logo, MN é paralelo a AC. Analogamente, PQ também é paralelo a AC e MQ e PN são paralelos a BD. Portanto, no quadrilátero MNPQ os lados opostos são paralelos, o que mostra que MNPQ é um paralelogramo.



Consideremos agora o tetraedro de vértices A, B, C e D. Os segmentos MP e NO, que conectam os pontos médios de duas arestas opostas, são diagonais de um paralelogramo e, portanto, se cortam ao meio. Do mesmo modo, os pontos médios R e S das arestas AC e BD formam, juntamente com M e P, um paralelogramo. Logo RS e MP também se cortam ao meio. Portanto, os pontos médios dos 3 pares de arestas opostas determinam segmentos que se cortam ao meio.

12. Não. Uma reta simultaneamente paralela a dois planos secantes é paralela à sua reta de interseção. Para que a reta fosse simultaneamente paralela a três planos seria necessário que as retas de interseção de cada par de planos fossem paralelas ou coincidentes; neste caso, porém, os planos não se cortariam em um ponto.

13. Os planos α e β podem ser paralelos ou secantes. No primeiro caso, o plano γ pode ser:

a) paralelo a ambos, determinando assim três planos paralelos; ou

b) secante a eles, cortando-os, portanto, segundo retas paralelas.

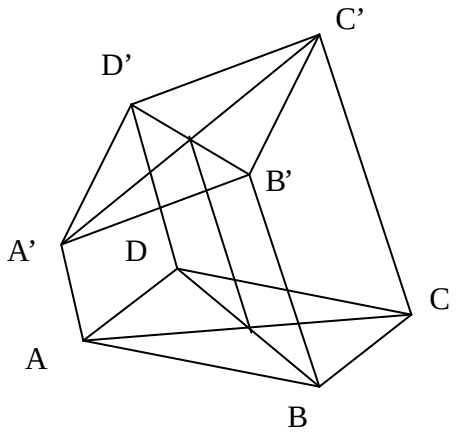
Caso α e β sejam secantes, há três posições possíveis para γ com relação à reta r de interseção de α e β:

c) γ contém r; neste caso, α, β e γ se cortam segundo uma reta; ou

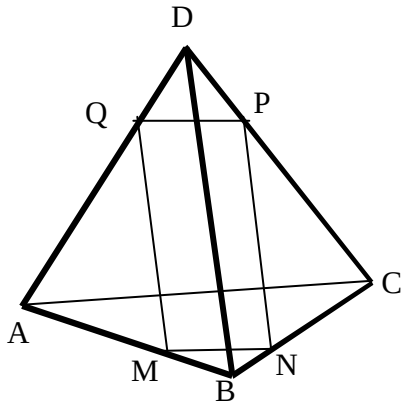
d) γ é paralela a r; neste caso, ou γ é paralelo a um dos planos α ou β (resultando na situação b acima) ou intersecta cada um deles segundo retas paralelas a r; ou

e) γ é secante a r; neste caso, os três planos tem exatamente um ponto em comum, que é exatamente o ponto em que γ intersecta r.

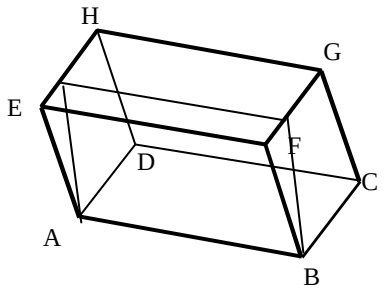
14. O ponto que une o ponto de encontro das diagonais de ABCD e A'B'C'D' é base média dos trapézios AA'C'C e BB'D'D. Logo $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$.



15. Como o plano é paralelo a BD, sua interseção MQ com a face ABD (que contém a reta BD) é paralela a BD. Analogamente, NP também é paralela a CD, enquanto MN e PQ são paralelos a AB. Logo, o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo, já que tem lados opostos paralelos.

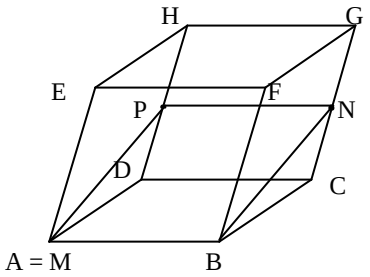


16. A seção é o segmento de reta AB, caso o plano não corte as demais faces ou é um paralelogramo. Neste caso, o lado oposto a AB pode ser uma das arestas paralelas CD, EF, GH ou, ainda, pode ser uma paralela a elas contida nos planos CDFE ou EFHG.

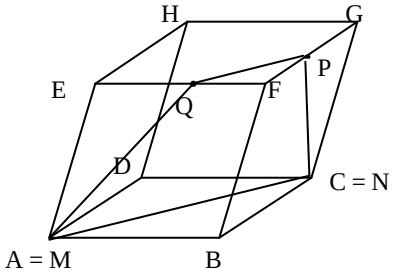


17.

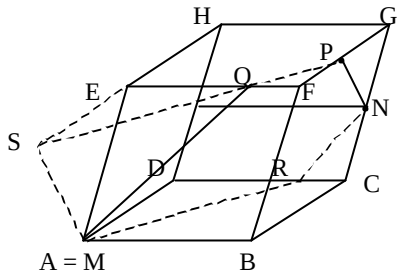
a) A seção é um paralelogramo.



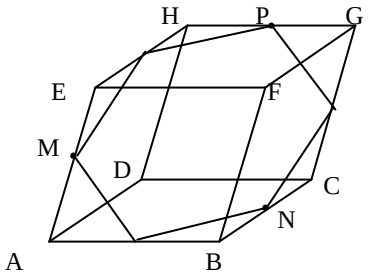
b) O plano corta o plano da face EFGH segundo uma paralela à diagonal AC, ou seja, segundo a reta que liga os pontos P e Q, médios de FG e EF. A seção é um trapézio.



c) Conhece-se o segmento PN em que o plano intersecta a face BFGC. A interseção com a face paralela ADHE ocorre segundo uma paralela a PN. Portanto, a aresta EH é intersectada em seu prolongamento, em um ponto S tal ES = EH. Ligando este ponto a P determina-se o ponto Q em que o plano corta a aresta EF (por semelhança de triângulos, o ponto Q é tal que FQ = 2. Agora, podemos encontrar a interseção com a face ABCD, que deve ser paralela a PQ. Logo, a aresta CD é cortada em um ponto R tal que RC = 2. A seção é o pentágono ARNPQ.



d) A seção é um hexágono que passa pelo ponto médio de seis das arestas do cubo.

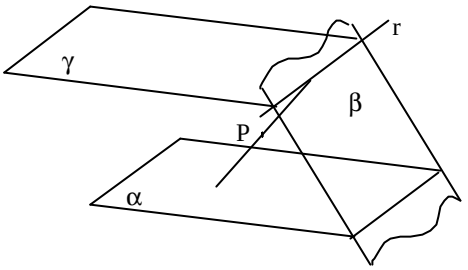


18. Sejam r e s retas paralelas e um ponto A qualquer não pertencente a elas. Vamos mostrar que os planos α e β determinados por r e A e por s e A se intersectam segundo uma reta t que é simultaneamente paralela a r e a s (isto mostra que uma reta distinta de r e s que seja paralela a uma das retas r e s é necessariamente paralela à outra). Suponhamos que t intersecte o plano γ, determinado por r e s, em um ponto Q. Como t está contida em α e a reta de interseção de α e γ é r, resulta daí que Q pertence a reta r. Mas o mesmo argumento aplicado à reta r mostra que Q também pertence à reta s, o que contradiz o fato de r e s serem paralelas. Logo, t é paralela ao plano γ, o que mostra que t tem interseção vazia com r e com s. Como t é coplanar com cada uma destas retas, resulta daí que t é paralela a ambas.

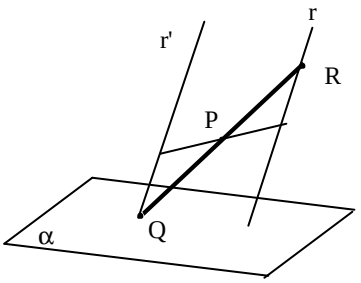
19. A existência do plano foi provada no texto. Para a demonstração da unicidade, suponhamos que existisse planos distintos β_1 e β_2 passando por A, ambos paralelos a um plano α. Como os planos são distintos e têm um ponto comum, sua interseção é uma reta r, paralela a α. Tomemos uma reta s em α, não paralela a r, que determina com A um plano γ. A interseção de γ e β_1 é uma reta t, necessariamente paralela a s (já que t e s são coplanares e estão contidas em planos paralelos) e, portanto, diferente de r. Analogamente, a interseção de γ e β_2 é uma reta u, também paralela a s. Como t e u passam ambas por A, elas são coincidentes. Logo, β_1 e β_2 admitem, além de sua reta de interseção r, uma

segunda reta comum t = u. Isto contradiz o fato de β_1 e β_2 serem distintos e prova a unicidade do plano paralelo.

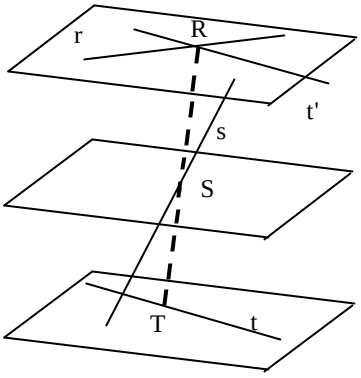
20. Caso α e β sejam paralelos, o lugar geométrico pedido é o plano paralelo a α e β e equidistante deles. Caso α e β sejam secantes, o lugar geométrico pedido é todo o espaço: todo ponto do espaço é ponto médio de algum segmento com extremos em α e β. De fato, dado um ponto P qualquer, basta tomar o plano γ, simétrico de α em relação a β e obter a reta r de interseção de γ e β. O simétrico de todo ponto de r em relação a P é um ponto de α; logo, construímos uma infinidade de segmentos com extremos em α e β tendo P como ponto médio.



21. Basta tomar a reta r', simétrica de r em relação a P e obter o ponto Q de interseção de r'com a. O simétrico de Q em relação a P é o ponto R sobre r; RQ é o segmento pedido.



22. O lugar geométido dos pontos médios de todos os segmentos que se apoiam em r e t é um plano simultaneamente paralelo a r e t. O ponto S é o ponto em que s corta este plano. Para encontrar os extremos, basta achar a reta t' simétrica de t em relação a S, que corta r em R. Finalmente, T é o simétrico de R em relação a S.



23.

a) A imagem da janela é semelhante a ela, com razão de semelhança igual a razão entre as distâncias do filme e da janela à lente. Assim o comprimento c e a largura l na imagem são tais que

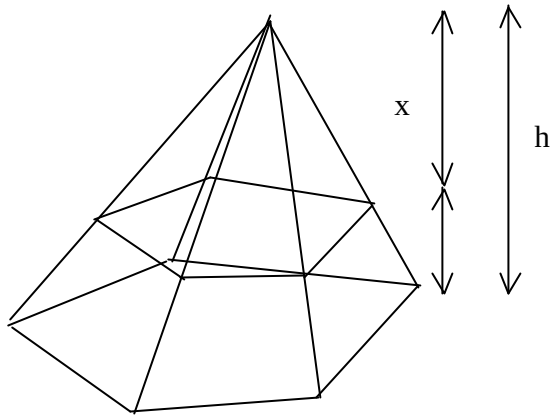
$\frac{c}{10\,\text{cm}} = \frac{3\,\text{m}}{6\,\text{m}}$; ou seja c = 5 cm e

$\frac{l}{10\,\text{cm}} = \frac{1\,\text{m}}{6\,\text{m}}$; ou seja a = 1,66 cm .

b) Temos $\frac{3{,}5\ \text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{1{,}75\text{m}}{d}$; logo a distância mínima é d = 5 m.

24. Um paralelepípedo oblíquo com arestas iguais não é semelhante a um cubo, que também tem arestas iguais (logo, proporcionais às do cubo). Um tetraedro, porém, fica completamente determinado por suas arestas. Se dois tetraedros têm arestas proporcionais, é sempre possível posicioná-los com um vértice comum, de modo que eles estejam associados por uma homotetia.

25. A distância x do plano de seção ao vértice deve satisfazer $\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2}$. Logo, x = $h\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a distância do plano à base é d = h – x = $h\frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx$ 0,29 h


x
h