Soluções do Capítulo 8 (Volume 2)

1. Não. Basta considerar duas retas concorrentes s e t em um plano perpendicular a uma reta r. As retas s e t são ambas ortogonais a r, mas não são paralelas entre si.

2. a) Seja s uma reta paralela a r e β um plano paralelo a α. Como r é ortogonal a cada reta de α, o mesmo ocorre com s. Logo s também é perpendicular a α. Cada reta de β é paralela a uma reta de α e, portanto, é ortogonal a r. Logo, r também é perpendicular a β.

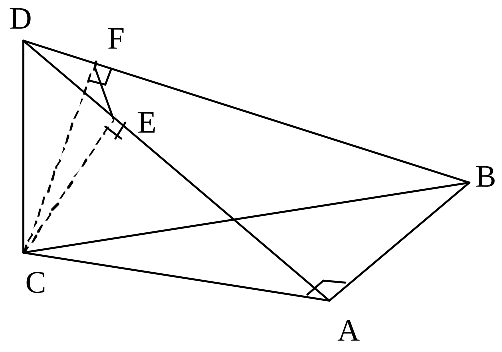
   b) Suponhamos que r e r' sejam ambas perpendiculares ao plano α e que r e r' não sejam paralelas. Pelo ponto de interseção de r' e α traçamos a reta r'', paralela a r. Como r' não é paralela a r, as retas r' e r'' são distintas e determinam um plano β, que corta α segundo a reta s. Como r'e r'' são ambas perpendiculares a α, resulta que r' e r'' são ambas perpendiculares a s. Mas isto significa que, no plano β, existem duas retas perpendiculares à reta s passando pelo mesmo ponto, o que é uma contradição. Logo, r e r' são necessariamente paralelas.

   Suponhamos que dois planos distintos α e β sejam ambos perpendiculares a r. Seja s uma reta qualquer de α passando pelo ponto de interseção de r e α e considere o plano determinado por r e s, que corta β segundo uma reta t. A reta t é necessariamente perpendicular a r (já que r é perpendicular a α) e, portanto, é paralela a s (já que retas de um plano perpendiculares a uma outra reta deste plano são paralelas entre si). Logo, existe uma reta de β que é paralela a s, o que mostra que s é paralela a β. Como o argumento vale para toda reta de α passando pelo seu ponto de interseção com P, segue-se que α e β são planos paralelos.

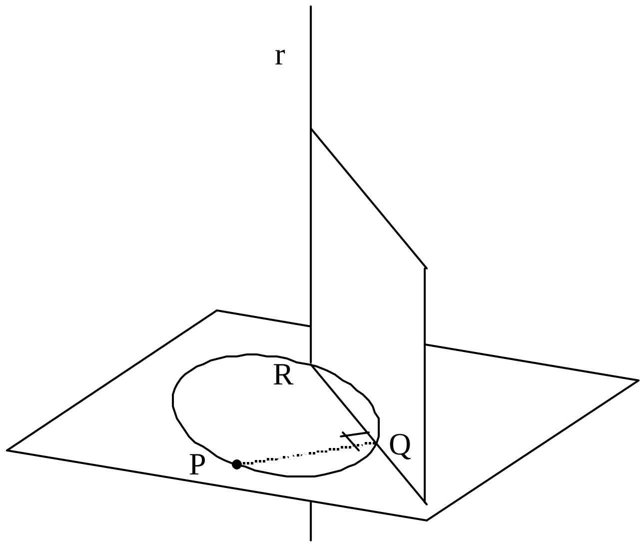
3. a) A reta AB é perpendicular a AC (já que o triângulo ABC é retângulo em A) e ortogonal a CD (já que CD é perpendicular a um plano que contém AB). Portanto, AB é ortogonal a toda reta do plano ACD; em particular, é perpendicular a AD.

   b) CE é perpendicular a AD, por construção. Além disso, CE é ortogonal a AB, por estar contida em um plano perpendicular a AB. Portanto, CE é perpendicular a todas as retas do plano ADB passando por E; em particular, CE é perpendicular a EF.

c) Como CE é perpendicular ao plano ADB, CE é ortogonal a DF. Por outro lado, CF é perpendicular a DF, por construção. Portanto, o plano CEF é perpendicular a DF e, em conseqüência, DF é perpendicular à reta EF contida neste plano.

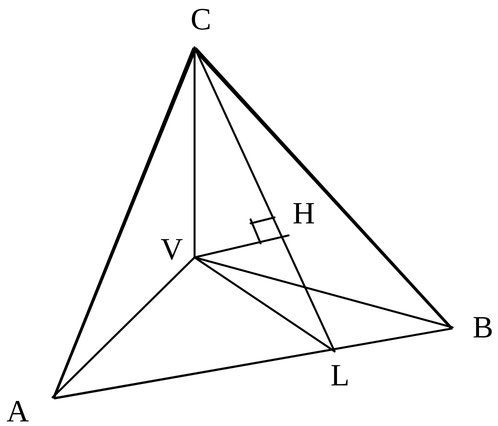


4. As retas perpendiculares a r estão no plano perpendicular a r passando por P. Os pés destas perpendiculares são exatamente os pontos Q tais que o ângulo PQR é reto, onde R é a projeção ortogonal de P sobre r. Logo, o L. G. é um círculo de diâmetro PR.



5. Os quatro centros das faces de um tetraedro regular determinam um outro tetraedro regular. Os seis centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular (note que cada face do octaedro corresponde a um vértice do cubo). Reciprocamente, os oito centros das faces de um octaedro regular são vértices de um cubo.

6. Seja VH a perpendicular baixada sobre o plano ABC e considere o plano determinado por C, V e H, que intersecta AB em L. Como VC é perpendicular a VA e VB, segue-se que VC é ortogonal a AB. Por outro lado, VH também é ortogonal a AB, por ser perpendicular ao plano ABC que contém AB. Logo, o plano VHC é perpendicular à reta AB. Assim, a reta VL, que está contida neste plano, é perpendicular à aresta AB; ou seja, H pertence à altura relativa ao lado AB do triângulo ABC. O mesmo argumento mostra que H também está sobre as demais alturas, mostrando que H é o ortocentro de ABC.



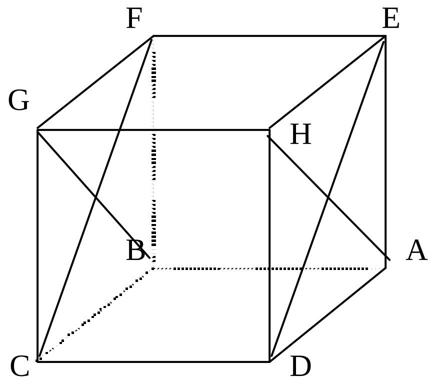
7. Sejam α e β dois planos tais que as retas r e s sejam respectivamente perpendiculares a eles. Suponhamos, inicialmente, que r e s sejam ortogonais. Seja P o ponto de interseção de r e α. Como α contém todas as retas perpendiculares a r passando por P, segue-se que a paralela s' a s passando por P está contida em α. Logo, α contém uma reta s' que é perpendicular a β, o que mostra que α e β são perpendiculares. Para a recíproca, suponhamos agora que α e β sejam perpendiculares. Sejam s'e r' retas perpendiculares à interseção de α e β e contidas em cada um dos planos. Como os planos são perpendiculares, estas retas são perpendiculares entre si e perpendiculares a β e α, respectivamente. Logo, elas são respectivamente paralelas a r e s, o que mostra que r e s são ortogonais.

8. Certo. Se α contém uma reta perpendicular a um plano β, então α é perpendicular a β. Mas, neste caso, β também é perpendicular a α e, portanto, possui uma reta perpendicular a α.

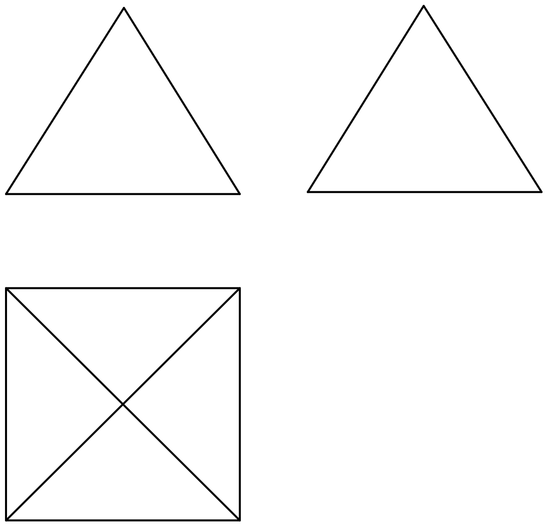
9. Sim. Se r é perpendicular a α, todo plano contendo r é perpendicular a α. Caso contrário, basta conduzir, por um ponto qualquer de r, uma reta s perpendicular a α; r e s determinam um plano perpendicular a α.

10. Se o plano γ é perpendicular à reta de interseção de α e β, então cada um destes dois planos possui uma reta perpendicular a γ, o que mostra que cada um deles é perpendicular a γ. Suponhamos, por outro lado, que γ seja perpendicular a α e a β. Cada um destes planos possui, portanto, uma reta perpendicular a γ. Como todas as retas perpendiculares a γ são paralelas, resulta que estas duas retas são paralelas entre si. Mas duas retas contidas em planos secantes são paralelas se e somente se são paralelas à sua interseção; portanto, a reta de interseção de α e β é também perpendicular a γ.

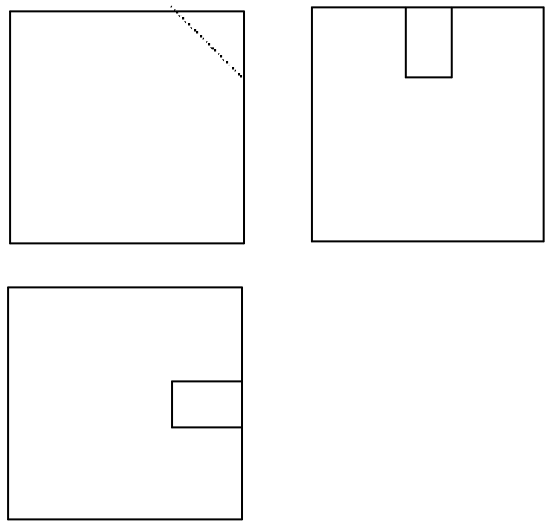
11. Basta mostrar que um dos planos contém uma reta perpendicular ao outro. Tomemos, por exemplo, a diagonal de face ED. ED é perpendicular a diagonal de face AH e é ortogonal à aresta AB, por estar contida no plano da face AEHD, que é perpendicular a AB. Portanto, ED é perpendicular ao plano diagonal AHGB, o que mostra que o plano diagonal CDFE é perpendicular a ele.



12.

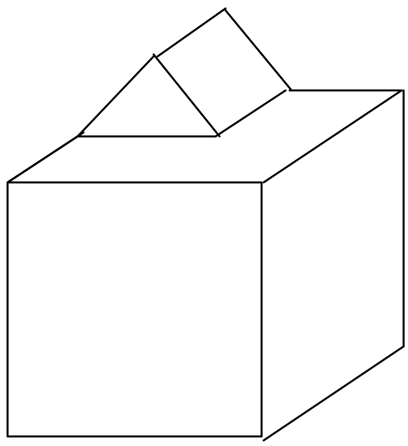


(a)

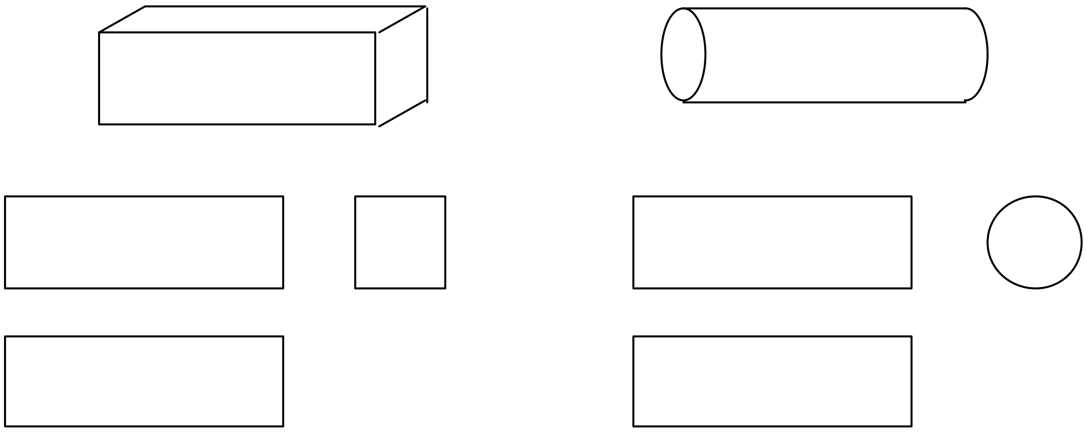


(b)

13.

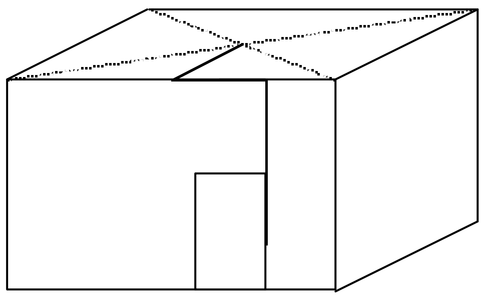


14. A resposta óbvia é um paralelepípedo retângulo, com a vista de perfil correspondente sendo um outro retângulo, conforme mostrado na figura da esquerda. No entanto, existem outros sólidos com as mesmas vistas superior e frontal. Por exemplo, o sólido poderia ser um cilindro, com o conjunto de vistas dado à direita.

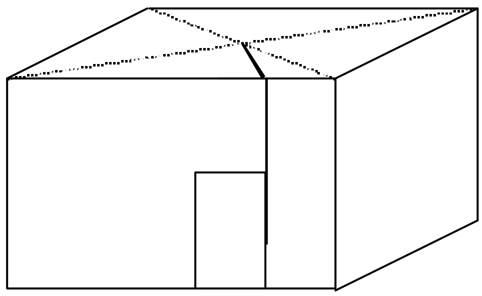


15.

a) No primeiro caso, o comprimento de fio na parede é (3,00 – 0,80) = 2,20 m, no encontro da parede com o teto é (2,50 – 0,70) = 1,80 m e no teto é 1,35 m, para um comprimento total igual a 5,35 m.



b) O comprimento ao longo da parede é o mesmo (2,20 m), mas ao longo do teto ele segue em linha reta, para um comprimento igual a $\sqrt{1,80^2 + 1,35^2}$ = 2,25 m; o comprimento total é igual a 4,45 m.



c) O fio deve subir verticalmente até o limite da porta, com um comprimento igual a 1,95 – 0,70 = 1,25 m. A partit daí, deve se dirigir ao centro do teto de acordo com um caminho mínimo, que pode ser obtido através da planificação da parede e teto. O comprimento de fio corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de lados iguais a 1,80 m e 1,05 + 1,35 = 2,40 m e, portanto, mede $\sqrt{1{,}80^2 + 2{,}40^2}$ = 3,00 m. Logo, o comprimento total de fio é 4,25 m.