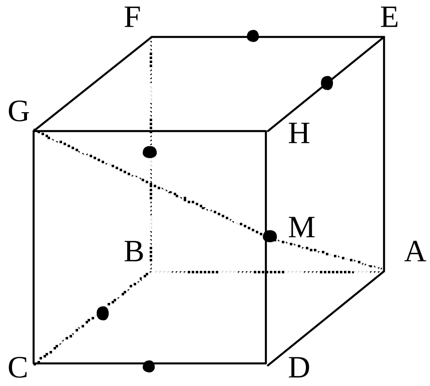
Soluções do Capítulo 9 (Volume 2)

1. Considere as arestas opostas AB e CD do tetraedro ABCD. Como CA = CB e DA = DB, os pontos C e D estão, ambos, no plano mediador de AB, que é perpendicular a AB. Logo, a reta CD é ortogonal a AB, por estar contida em um plano perpendicular a AB.

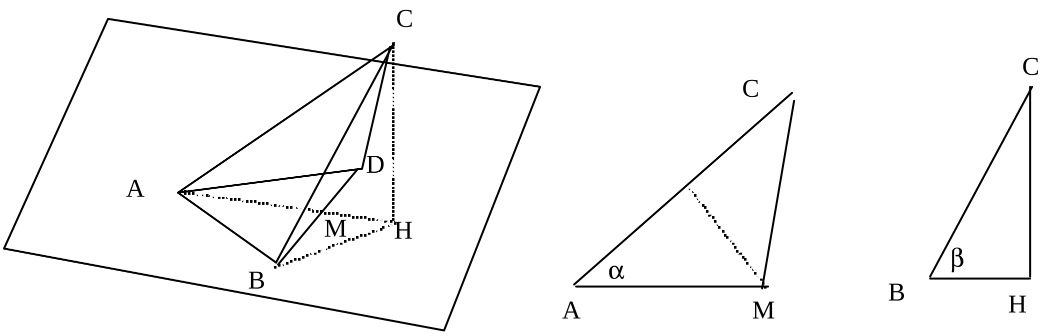
2. Tomemos, por exemplo, o ponto M, médio de DH. Os triângulos retângulos ADM e GHM são iguais. Logo, AM = GM, o que mostra que M está no plano mediador da diagonal AG. O mesmo ocorre com os demais pontos médios. Logo, todos eles estão sobre um mesmo plano.



3. É a interseção dos planos mediadores dos segmentos determinados por eles, que é a reta perpendicular ao plano do triângulo passando pelo seu circuncentro.
4. O conjunto dos planos equidistantes de dois planos secantes é a união dos dois planos bissetores dos diedros formados por eles (estes dois planos são perpendiculares entre si). No caso dos planos serem paralelos, o L.G. dos pontos equidistantes é o plano paralelo a ambos, a igual distância dos dois.

5. O triângulo ABC é isósceles (AB = AD) e tem um ângulo igual a 60º; logo, ele é equilátero. Assim, BD = AB= AD = a (lado do quadrado). Como BC e CD são também iguais ao lado do quadrado, segue-se que o triângulo BCD também é equilátero. Portanto, o triângulo AMC é isósceles, com AM = CM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura de triângulo equilátero de lado a) e AC = $a\sqrt{2}$ (diagonal de quadrado de lado a). Assim, o ângulo α que AC forma com o plano horizontal é tal que

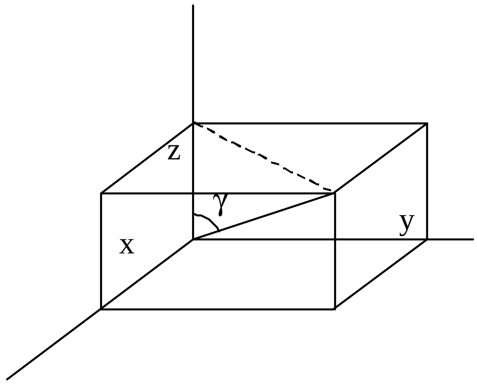
$$\cos\alpha = \frac{AC/2}{AM} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 \text{ e } \alpha \approx 35^{o}$$



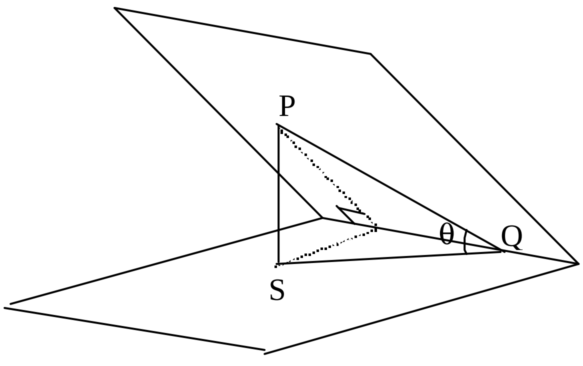
Como o triângulo ABC é retângulo em B, o segmento BC é perpendicular a AB. Logo, o ângulo que o plano ABC forma com o plano horizontal é o ângulo que a reta BC forma com ele. Para calculá-lo basta conduzir por BC um plano perpendicular a AB. Podemos, por exemplo, traçar a perpendicular por C ao plano horizontal, que o intersecta em H. Como CH e BC são ambas ortogonais a AB, o plano formado é perpendicular a AB. A reta BH, contida neste plano, é perpendicular a AB e, portanto, BH = AB tg 30º = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Logo, o ângulo β que o plano de ABC forma com o plano horizontal é tal que:

$$\cos\beta = \frac{BH}{BC} = \frac{a\sqrt{3}/3}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.5774 \text{ e } \beta \approx 54^{o}.$$

6. Um ponto P qualquer da reta determina com o ponto O uma diagonal de um paralelepípedo retângulo com arestas de direção x, y e z. O ângulo γ, formado com o eixo z, é tal que cos γ = z/OP. Do mesmo modo, cos α = x/OP e cos β = y/OP. Logo, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{OP^2} = \dfrac{OP^2}{OP^2} = 1$



7. Por um ponto qualquer P de α tracemos uma reta r que corta em Q a reta interseção de α e β. Seja S o pé da perpendicular baixada de P a β. O ângulo θ que r forma com o plano α é tal que sen θ = PS/PQ. Logo, θ é máximo quando PQ é mínimo, ou seja, quando r é perpendicular à reta de interseção.



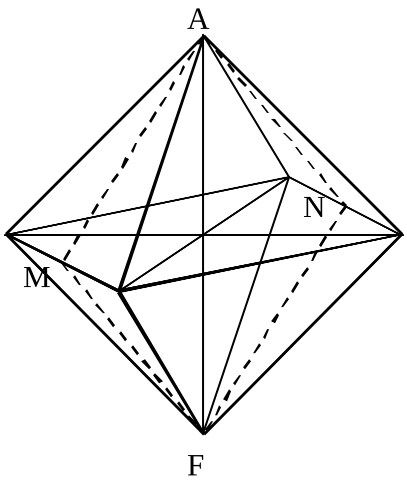
8. Os elementos pedidos aparecem na seção determinada no octaedro por um plano que contém dois vértices opostos e passa pelo ponto médio de duas arestas opostas. Sendo a a aresta do octaedro, a seção é um losango de lados iguais a $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e diagonais iguais a a e $a\sqrt{2}$. A distância d entre as faces opostas do octaedro é a altura do losango e pode ser

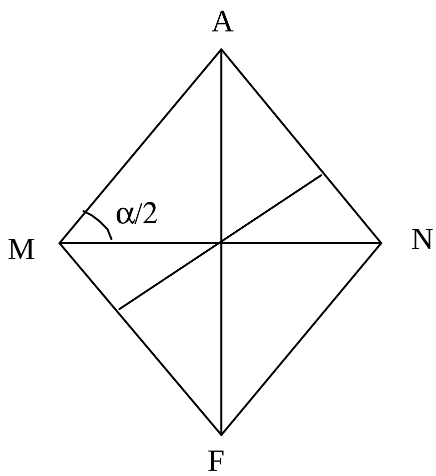
calculada exprimindo-se a área do losango de dois modos diferentes (como o produto da base pela altura e como o semiproduto das diagonais). Temos:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}.d = \frac{a.a\sqrt{2}}{2} \text{ e daí } d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

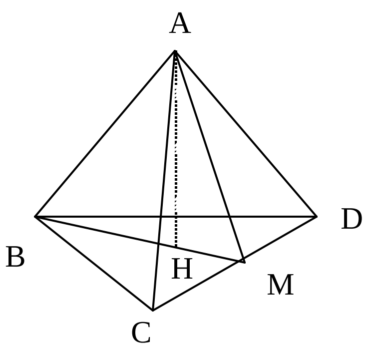
O ângulo diedro a entre faces adjacentes é tal que:

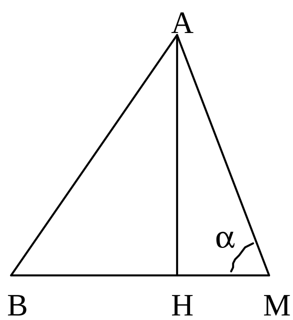
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a/2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414 \text{ ; daí } a/2 \approx 55^o \text{ e } a \approx 110^o.$$



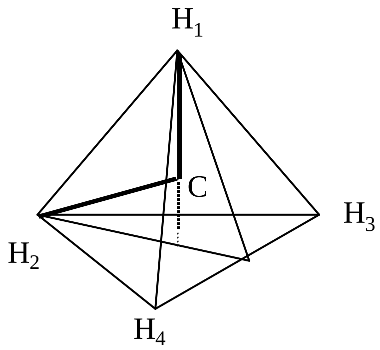


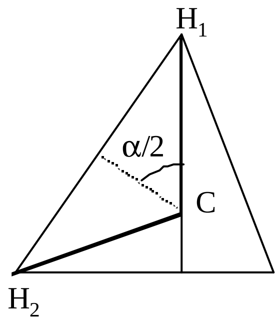
9. O ângulo diedro entre duas faces do tetraedro aparece na seção perpendicular à sua aresta comum AB. É conveniente tomá-la passando pelo ponto médio M da aresta; neste caso, ela contém a aresta oposta . A perpendicular ao plano BCD baixada de A corta aquele plano no seu circuncentro H. Assim, temos AM = BM e HM = $\frac{1}{3}$BM. Portanto, o ângulo diedro α é tal que cos α = HM/AM= 1/3 e $\alpha \approx 70^o$.





10. O centro do tetraedro fica sobre a altura traçada de um dos vértices e a divide em segmentos que estão entre si na razão 3:1 (veja o exercício 18). Assim, o ângulo α pedido é o ângulo do vértice de um triângulo isósceles de base igual a a e lados iguais a ¾ da altura do tetraedro, ou seja, $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Logo, $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \dfrac{a/2}{a\sqrt{6}/4} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$. Logo, $\alpha/2 \approx 55^o$ e $\alpha \approx 110^o$.



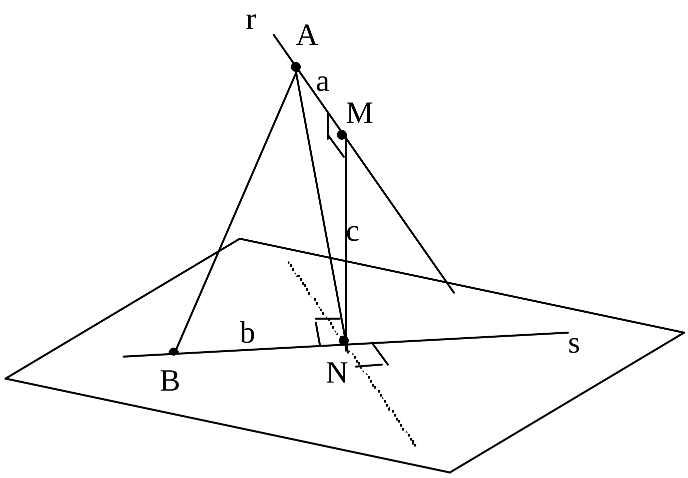


11. O triângulo AMN é retângulo, pois MN é perpendicular a r. Por outro lado, o triângulo ANM também é retângulo, já que a reta s é perpendicular ao plano MAN, por ser perpendicular a MN e ortogonal a r. Assim, temos as relações:

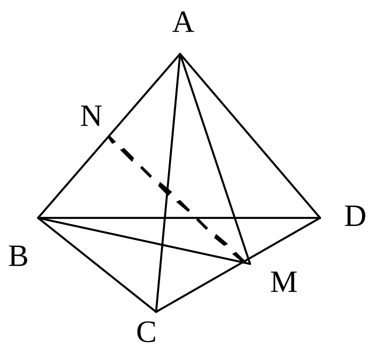
$AN^2 = a^2 + c^2$

$AB^2 = b^2 + AN^2$,

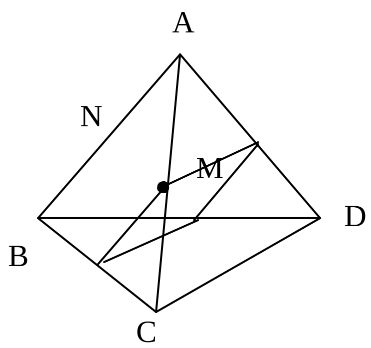
de onde se obtém $AB^2 = a^2 + b^2 + c^2$



12. Sejam M e N os pontos médios das arestas AB e CD. Como AC = AD e BC = BD, os vértices A e B pertencem ao plano mediador da aresta CD; logo, o plano AMB é perpendicular a CD e a reta MN, contida neste plano, também é perpendicular a CD. Do mesmo modo, MN é também perpendicular a AB e é, portanto, a perpendicular comum a AB e CD.



13. A seção determinada em um tetraedro qualquer por um plano paralelo a duas arestas opostas é um paralelogramo, já que as retas de interseção com as faces são paralelas a uma das duas arestas. No caso do tetraedro regular, tais seções são retângulos, já que as arestas opostas são ortogonais. Além disso, no caso de passar pelo ponto médio de uma aresta, cada lado é igual a metade da aresta do tetraedro. Portanto, a seção é um quadrado.



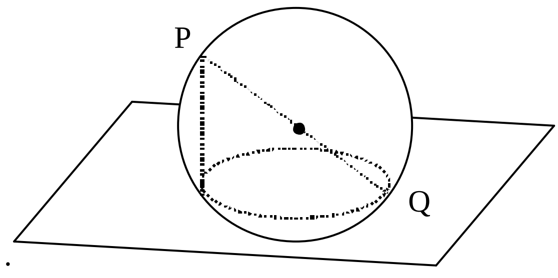
14. A interseção de uma esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano tais que PO = r. Seja Q a projeção ortogonal de O sobre o plano. Em cada triângulo OPQ, o cateto OQ é fixo. Logo, OP se mantém constante e igual a r se e somente se QP se

mantém constante e igual a $\sqrt{r^2 - OQ^2}$. Portanto, o L.G. dos pontos de interseção é sempre um círculo, que tem raio máximo quando OQ = 0, ou seja, quando o plano passa pelo centro O da esfera.

15. Como estes dois pontos não são diametralmente opostos, eles não são colineares com o centro da esfera. Logo, determinam um único plano, que intersecta a esfera segundo um círculo máximo.

16. APB é um triângulo retângulo em P se e somente se a mediana relativa a AB mede a metade do segemento AB. Isto faz com que o LG dos pontos que P determinam um ângulo reto APB seja o conjunto dos pontos tais que a distância ao ponto médio de AB é constante e igual à metade de AB, ou seja, uma esfera de diâmetro AB.

17. Os pés das perpendiculares formam com P e Q um ângulo reto. Logo, seu lugar geométrico é o círculo resultante da interseção da esfera de diâmetro PQ (veja o exercício anterior) com o plano; este círculo tem diâmetro QR, onde R é a projeção de P sobre o plano.



18. O L.G. dos pontos equidistantes de três vértices B, C e D de um tetraedro é a perpendicular a seu plano passando pelo circuncentro. No caso de um tetraedro regular, esta perpendicular passa pelo vértice A (já que ele é equidistande de B, C e D); é, portanto, a altura do tetraedro. O centro da esfera circuscrita é o ponto O sobre a altura AH tal que OA = OB. Assim, no triângulo OBH, temos:

$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, onde R é o raio da esfera circunscrita.

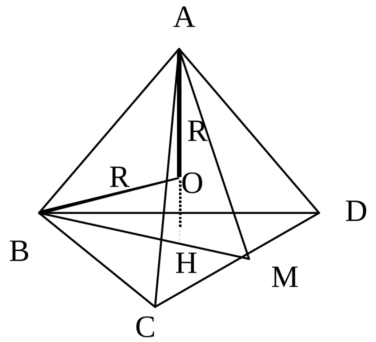
Resolvendo a equação acima, obtém-se $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Portanto, o ponto O é tal que

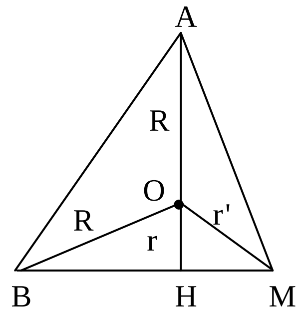
$\frac{OA}{AH} = \frac{a\sqrt{6}/4}{a\sqrt{6}/3} = \frac{3}{4}$. Este ponto necessariamente está sobre as demais alturas do tetraedro e é centro também das esferas tangentes às faces do tetraedro (já que a altura relativa a um vértice é também à reta de interseção dos bissetores dos diedros das faces); argumento análogo mostra também que ele é centro de uma esfera tangente às arestas.

Os raios destas esferas são dados por:

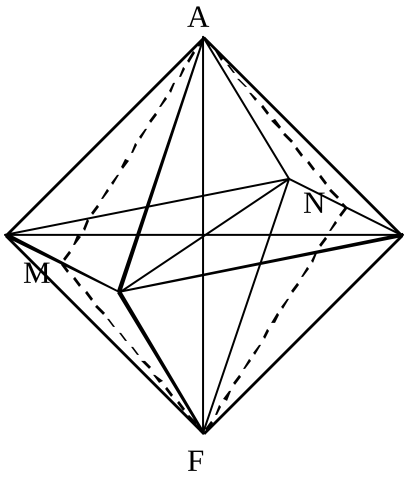
r = OH = $\frac{1}{4}AH = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ e

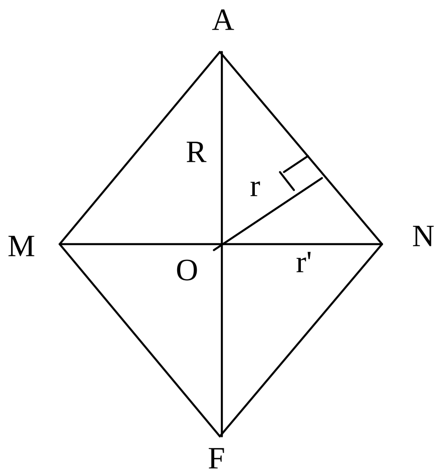
r' = OM = $\sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



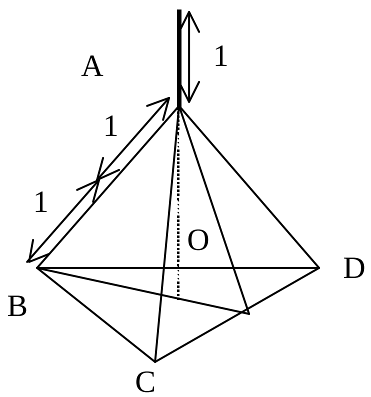


19. Os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas de um octaedro regular aparecem na seção obtida por um plano que passa por dois vértices opostos e pelos pontos médios de duas arestas opostas não incidentes a estes vértices. O raio R da esfera circunscrita é igual à metade da diagonal do octaedro, que, por sua vez, é a diagonal de um quadrado de lado a. Logo, R = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.O raio r'da esfera tangente às arestas é igual à metade da distância MN entre duas arestas opostas; ou seja, r'= a/2. O raio r da esfera inscrita é igual à metade da distância entre as arestas (veja o exercício 8) e é igual a $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.



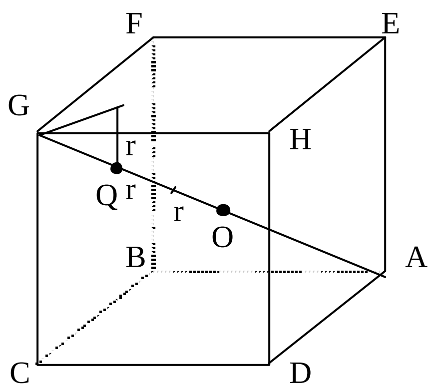


20. Os centros das esferas são vértices de um tetraedro regular de aresta a = 2. O raio R da esfera tangente exteriormente a elas é igual a OA + 1, onde OA é o segmento que une o centro O do tetraedro a um dos vértices (ou seja o raio da esfera circunscrita ao tetraedro). Usando o resultado do exercício 18, temos R = $\frac{a\sqrt{6}}{4}+1=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$.



21. Uma esfera tangente a três faces de um cubo tem seu centro equidistante destas faces; portanto, sobre a reta de interseção dos três diedros, que é a diagonal referente a este vértice (basta notar que o vértice oposto é equidistante das três faces). Na figura, estão representados o centro Q de uma das esferas tangente a três faces e o centro O da esfera central.

Temos: $\dfrac{r}{GQ} = \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}}$ e, portanto, GQ = $r\sqrt{3}$. Considerando o segmento OG, que corresponde à metade da diagonal do cubo, temos $2r + r\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, de onde se obtém $r = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}a$.



22. Há 24 fusos horários (um para cada hora do dia). Logo, o ângulo central correspondente a um fuso horário é 360°/24 = 15°.

23. O fuso central correspondente a uma localidade tem longitude igual ao múltiplo de 15 mais próximo da longitude da localidade. Assim, temos:

Cidade	Longitude	Meridiano Central	Hora em relação a Greenwich	Hora às 12 h do Rio de Janeiro
Nova York	–74°	–75°	–5 horas	10 h
Rio de Janeiro	–43°	–45°	–3 horas	12 h
Paris	2°	0°	0 hora	15 h
Atenas	24°	30°	+2 horas	17 h
Bagdá	45°	45°	+3 horas	18 h
Calcutá	88°	90°	+6 horas	21 h