Curso de Atualização para Professores de Matemática do Ensino Médio

Atividades da Tarde

Problemas de Proporcionalidade (Prof. Elon Lages Lima)

Respostas

1. (i) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.
$f(x) + f(y) = (ax + b) + (ay + b) = a(x + y) + 2b$
$f(x + y) = a(x + y) + b$.
Portanto, $f(x) + f(y)$ é igual a $f(x + y)$ se e somente se $b = 0$.

Agora, para que $f(x + y) > f(x) + f(y)$, devemos ter $a(x + y) + b > a(x + y) + 2b$, ou seja $b < 0$.
Similarmente, para que $f(x + y) < f(x) + f(y)$, devemos ter $b > 0$.

(ii) $f(cx) = acx + b$ e $cf(x) = acx + cb$.
Suponha $c \neq 0$.
Então: $f(cx) = cf(x)$ se e só se $cb = 0$ ou seja: $b = 0$.
Do mesmo modo, $f(cx) < cf(x)$ se e só se $(1 - c)b < 0$ ou seja,
$c > 1$ e $b > 0$ ou $c < 1$ e $b < 0$.
Agora, se $c = 0$:
$f(cx) = b$ e $cf(x) = 0$. A igualdade ocorre apenas para $b = 0$.
Agora, $f(cx) < cf(x)$ se e somente se $b < 0$.

2. Sejam T o instante de encontro dos dois aviões e d a distância percorrida pelo primeiro avião até o instante de encontro dos dois aviões. Suponha que $t = 0$ corresponde ao instante de decolagem do primeiro avião.

Para o primeiro avião: $\dfrac{d}{T} = 600$ (pois sua velocidade é constante e igual a 600 km/h).

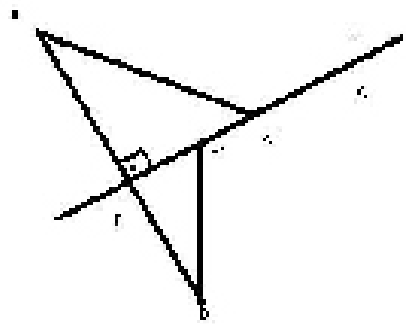
Para o segundo: $\dfrac{d + 200}{T - 3} = 800$ (pois sua velocidade é 800 km/h).

Resolvendo-se o sistema linear:

$$\begin{cases} d - 600T = 0 \\ d - 800T = -2600 \end{cases},$$

obtemos $T = 13$ e $d = 7800$.
Observe que não é possível determinar as distâncias entre B e C.
Assim, sendo, se a distância entre B e C for maior que 7800 km, como o segundo avião tem uma velocidade maior, este avião chegará primeiro em C. Caso contrário, o primeiro avião é o primeiro a chegar em C.

3. Considere a seguinte figura:
onde são dados: $AP = 4$, $PB = 4$, $PB' = 2$, $PA' = 3$.
Sejam: $AA' = y$ e $BB' = x$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulo APA' e PBA', obtemos $y = 5$ e $x = \sqrt{20}$.



Assim, o tempo gasto pelo caminhante A é: $5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 30$.
Para o caminhante B : $\sqrt{20} \cdot 3 + 4 \cdot 5 \approx 33.41$.
Logo, o caminhante A chega primeiro no ponto Q.

4. Sejam $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$.

(i) Suponha que $a > c$. Exibiremos um $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > g(x)$, para cada $x > m$.

Tome: $m = \dfrac{d-b}{a-c}$.

$x > m \iff x > \dfrac{d-b}{a-c} \iff (a-c)x > d-b \iff ax - cx > d-b \iff ax + b > cx + d$.

(Observação: este valor de m foi obtido fazendo-se $f(x) = g(x)$)

(ii) Suponha que $b > d$. Exibiremos um $k \in R$ tal que $f(x) > g(x)$ para cada $x \in (0, k)$.

Se $c - a > 0$, basta $k = \dfrac{b-d}{c-a}$.

Note que $k > 0$ e se $0 < x < k \iff 0 < x < \dfrac{b-d}{c-d} \iff 0 < (c-a)x < (b-d) \iff 0 < cx + d < ax + b \iff 0 < g(x) < f(x)$.

Ou seja: $x \in (0, k)$, implica $f(x) > g(x)$

Se $c < a$, podemos utilizar qualquer valor de $k > 0$.

De fato, para qualquer $x > 0$ (em particular, para $x \in (0, k)$) teríamos: $cx < ax \implies cx + d < ax + d \implies cx + d < ax + b$ (pois $b > d$).

(iii) Suponha $a > c$ e $b < d$. Exibiremos um $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < g(x)$ quando $x < p$ e $g(x) < f(x)$ e $x > p$.

Basta: tomarmos $p = \dfrac{d-b}{a-c} > 0$.

Com efeito:

$x > p \implies x > \dfrac{d-b}{a-c} \implies x(a-c) > d-b \implies ax - cx > d-b \implies ax + b = f(x) > g(x)$

$x < p \implies x < \dfrac{d-b}{a-c} \implies$ (utilizando raciocínio análogo ao anterior) $f(x) < g(x)$.

Problemas de Funções Quadráticas (Prof. Elon Lages Lima)

1. Tome um ponto P sobre o gráfico da função f, digamos $P(x, \frac{3}{x})$.

A distância de P à origem é $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2}}$.

Assim, queremos encontrar o ponto $x_0 > 0$, tal que $d(x_0) \leq d(x)$, para todo $x > 0$.

É fato que a média aritmética entre dois números positivos é sempre maior ou igual que a média geométrica.

Em particular: $\frac{1}{2}(x^2 + \frac{9}{x^2}) \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{9}{x^2}} = 3$ e, assim, $x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 6$.

Ou seja, $\sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2}} \geq \sqrt{6}$. Deste modo, se existir um $x_0 > 0$ tal que $\sqrt{x_0^2 + \frac{9}{x_0^2}} = \sqrt{6}$, este valor é o ponto de mínimo para a função distância.

Mas: Resolvendo-se a equação $\sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2}} = \sqrt{6}$, obtemos

$x^2 + \frac{9}{x^2} = 6 \implies x^4 + 9 = 6x^2 \implies x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \implies x^2 = 3 \implies x = \sqrt{3}$ é a raiz real positiva da equação.

Ou seja: fazendo-se $x_0 = \sqrt{3}$, obtemos $d(x_0) = \sqrt{6} \leq d(x)$, para cada $x > 0$.

Deste modo: O ponto $P(\sqrt{3}, \frac{3}{\sqrt{3}})$ é o ponto que está sobre o gráfico de f e que está a uma distância mínima da origem.

2. Considere a seqüência (x_n), onde

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \qquad (*)$$

onde $a > 0$ e $x_1^2 > a$.

Note que pela hipótese, $x_1 > \sqrt{a}$. Suponha que $x_n > \sqrt{a}$. Provaremos $x_{n+1} > \sqrt{a}$.

Note que $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}) < \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{\sqrt{a}}) = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{a}) > \dfrac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}$.

Logo, $x_n > \sqrt{a}$, para todo n.

Note que $x_n - x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}) = \dfrac{x_n}{2} - \dfrac{a}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} < 0$ (pois $x_n > \sqrt{a}$, para cada n).

Logo, $x_n > x_{n+1}$, para cada n.

Observação: Esta seqüência converge para $\sqrt{a}$. De fato, toda sequencia limitada e monótona e convergente. Assim, existe $L = \lim x_n$. É claro que $L > 0$.

Fazendo $n \to \infty$ em (*), obtemos $L = \frac{1}{2}(L + \dfrac{a}{L})$. A única raiz positiva desta equação é $L = \sqrt{a}$.

3. Sejam x e y dois números cuja soma é s e cujo produto é p. Então, $y = s - x$ e $p = x(s - x)$.

Logo: $x^2 - sx + p = 0 = y^2 - sy + p$. Assim, os números x e y são obtidos resolvendo-se a equação quadrática $x^2 - sx + p = 0$.

Agora, suponhamos que se conheçam a diferença e o produto.
Digamos, $x - y = d$ e $xy = p$.
Neste caso: $y = d - x \implies x(d - x) = p \implies x^2 - dx + p = 0$.
Do mesmo modo, $y^2 - dy + p = 0$.
Logo, os números x e y são raízes da equação $x^2 - dx + p = 0$.

Suponhamos conhecidos o produto p e o quociente q.
Então: $p = xy$ e $q = \dfrac{x}{y}$, com $y \neq 0$.
Similarmente, obtemos que $p = qy^2$. Ou seja, y é solução de $qy^2 - p = 0$.
Mas, x não é necessariamente solução da equação: $p = qx^2$. (Verifique com um contra-exemplo: $x = 1$, $y = 2$, $q = \frac{1}{2}$
e $p = 2$).