A Matemática do Ensino Médio, vol. 1

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

Capítulo 1. Conjuntos

1. Seja $x \in U$ um objeto com a propriedade Q_1. Então x não pode ter a propriedade P_2 pois $P_2 \Rightarrow Q_2$ e Q_2 é incompatível com Q_1. Como P_1 e P_2 esgotam todas as possibilidades, segue-se que x tem a propriedade P_1. Assim, vemos que $Q_1 \Rightarrow P_1$. Da mesma forma se mostra que $Q_2 \Rightarrow P_2$.

2. Sejam A, B, C pontos não-colineares e D o pé da perpendicular baixada de C sobre AB. Então CD é "a perpendicular" enquanto AC e BC são as "duas oblíquas". As propriedades P_1 e P_2 são respectivamente as afirmações $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BD}$. Por sua vez, Q_1 e Q_2 significam $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ respectivamente. Uma vez provadas as implicações $P_1 \Rightarrow Q_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2$, daí resultam as recíprocas $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$, pois as alternativas $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BD}$ esgotam as possibilidades, enquanto $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ são incompatíveis. (Aliás é claro que, neste caso, também P_1 e P_2 são incompatíveis e que Q_1 e Q_2 esgotam as possibilidades.) A afirmação final do exercício, segundo a qual "a maior é a que mais se afasta", requer uma modificação na qual P_1 e Q_1 são as mesmas, porém P_2 significa $\overline{AD} < \overline{BD}$, Q_2 quer dizer $\overline{AC} < \overline{BC}$ e uma nova implicação $P_3 \Rightarrow Q_3$ é incluída, onde P_3 é a afirmação $\overline{AD} > \overline{BD}$ e Q_3 significa $\overline{AC} > \overline{BC}$. Isto naturalmente, requer provar o exercício 1 para três implicações, o que se faz do mesmo modo e antecipa o exercício 4.

3. Resta provar que $Y_1 \subset X_1$ e $Y_2 \subset X_2$. Ora, se $y \in Y_1$ então, como $X_1 \cup X_2 = U$, deve-se ter $y \in X_1$ ou $y \in X_2$. Mas, como $X_2 \subset Y_2$, se fosse $y \in X_2$ isto obrigaria $y \in Y_2$, logo $y \in Y_1 \cap Y_2$, o que não é possível pois $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Portanto $y \in X_1$ e daí $Y_1 \subset X_1$. Analogamente se mostra que $Y_2 \subset X_2$.

4. É claro que os exercícios 1 e 3 têm o mesmo significado, diferindo apenas na terminologia: um fala de propriedades, o outro de conjuntos. Um diz implicação, o outro inclusão. Familiarizar-se com esta equivalência é um passo essencial no aprendizado da Matemática. No livro "Coordenadas no Espaço", têm-se oito posições relativas de três planos no espaço e, por outro lado, têm-se oito hipóteses possíveis sobre as equações que representam esses planos. Para provar que as hipóteses algébricas correspondem exatamente às oito posições geométricas, demonstram-se oito implicações Álgebra $\Rightarrow$ Geometria. Não há necessidade de provar as oito recíprocas porque as hipóteses algébricas claramente esgotam todas as possibilidades e as posições geométricas são, duas a duas, obviamente incompatíveis..

5. Se continuarmos admitindo que P_1 e P_2 esgotam as possibilidades, enquanto Q_1 e Q_2 são incompatíveis, as implicações $Q_1 \Rightarrow P_1$ e $Q_2 \Rightarrow P_2$ não obrigam que seja válida qualquer uma das recíprocas: $P_1 \Rightarrow Q_1$ nem $P_2 \Rightarrow Q_2$. Basta considerar o exemplo em que $U = \mathbb{N}$, P_1 é a propriedade "n é par", P_2 significa "n é ímpar", Q_1 quer dizer "n é múltiplo de 4" e Q_2 diz "n é um número primo maior do que 2".

6. $\sqrt{2}+2 = x \Rightarrow \sqrt{x} = x-2 \Rightarrow x = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 1$. Todas estas implicações são reversíveis, exceto a segunda. Na verdade, como $(-a)^2 = a^2$, a igualdade $x = (x-1)^2$ é satisfeita não apenas quando $\sqrt{x} = x-2$ como também se $\sqrt{x} = -(x-2)$, ou seja, $\sqrt{x} = 2-x$. Este último caso é válido quando $x = 1$ o que explica a "raiz estranha" 1. Como vimos no texto, a seqüência (correta) de implicações apenas diz que se $\sqrt{x}+2 = x$ então $x = 4$ ou $x = 1$. Como $x = 1$ não cumpre a condição dada, segue-se que $x = 4$. Quanto à equação $\sqrt{x}+3 = x$, a mesma seqüência de implicações acima nos conduz à equação $x^2-7x+9 = 0$, com a condição adicional $x > 3$ (pois $x-3 = \sqrt{x}$). As raízes desta equação são $x = (7 \pm \sqrt{13})/2$, logo apenas $x = (7+\sqrt{13})/2$ é a raiz > 3, a única que serve.

7. A equação $\sqrt{x}+m = x$, para ser escrita, requer $x \geq 0$ e, para ser satisfeita, requer $x \geq m$. Tem-se $\sqrt{x}+m = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x-m \Leftrightarrow x = (x-m)^2$ e $x \geq m$. A igualdade $x = (x-m)^2$ equivale a $x^2-(2m+1)x+m^2 = 0$. Esta equação possui duas raízes positivas distintas, cujo produto é m^2, logo uma delas apenas é maior do que m.

8. O erro está na segunda equivalência alegada. Tem-se apenas $x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x^2-2\cdot 1+1 = 0$ mas a recíproca é falsa. Uma explicação mais completa está no exercício 9, a seguir.

9. Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Definamos um novo polinômio $q(x)$ tomando um número α e substituindo em $p(x)$ o termo $a_i x^i$ (e somente este termo) por $a_i \alpha^i$. O polinômio $q(x)$ tem a propriedade de que $p(\alpha) = q(\alpha)$. Em particular, se α é uma raiz de $p(x)$ então $q(\alpha) = 0$. Nada mais. As demais raízes de $q(x)$ nada têm a ver com as de $p(x)$. (Quando, no caso de um polinômio $p(x) = ax^2+bx+c$, substituímos, no termo bx, a variável x por uma das raízes α de $p(x)$, obtemos $q(x) = a(x^2-\alpha^2)$. Uma das raízes de $q(x)$ é α e a outra é $-\alpha$.)

10. a) Seja A o conjunto dos elementos de U que satisfazem a condição $P(x)$. A afirmação (1) significa que $A = U$ enquanto que (2) exprime que $A \neq \emptyset$.

b) As negações de (1) e (2) são respectivamente: "Existe algum $x \in U$ que não satisfaz a condição $P(x)$" e "nenhum $x \in U$ satisfaz $P(x)$". Em termos de conjuntos (e com a notação do item a)), estas negações se exprimem assim: $A^c \neq \emptyset$ e $A^c = U$.

c) Numeremos as sentenças de 1 a 5, na ordem em que aparecem. A única afirmação verdadeira é a nº 4. As negações são: 1) Para todo número real x, tem-se $x^2 \neq -1$. 2) Existe um número inteiro n tal que $n^2 \leq n$. 3) Existe um número real x tal que $x \leq 1$ e $x^2 \geq 1$. 4) Existe um número real x tal que $n < x$ para todo número natural n. 5) Para todo número natural n, existe um número real x tal que $n \leq x$.

11. (a) 1) $M \subset C$; 2) $M \cap P \neq \emptyset$; 3) $C \cap F \neq \emptyset$; 4) $F \subset C \cup P$; 5) $P \cap C^c \neq \emptyset$.

(b) 6) $M \cap F \neq \emptyset$; 7) $F \cap C^c \neq \emptyset$; 8) $F \cap P \neq \emptyset$; 9) $F \subset M \cup P$; 10) $F \cap M \neq \emptyset$.

(c) A afirmativa verdadeira do segundo grupo é apenas a de número 9).

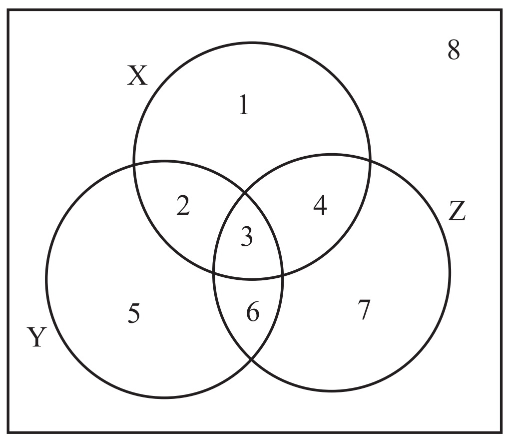
12. a) O texto constitucional não obriga intervenção federal num estado em nenhuma circunstância. Provavelmente, os legisladores queriam dizer que nos casos citados, e somente nesses casos, a União intervirá.

b) A União intervirá nos Estados ou no Distrito Federal para ...

13. Multiplicando ambos os membros da igualdade $x^2+x-1=0$ por $x-1$, obtém-se $x^3-2x+1=0$.

14. $x+4y=13k \Rightarrow 4x+3y=4(x+4y)-13y=13(4k-y)$. Reciprocamente, $4x+3y=13k \Rightarrow x+4y=10(4x+3y)-13(3x+2y)=13\cdot(10k-3x-2y)$.

15.



a) $(X^c \cup Y)^c = 1 \cup 4$;

b) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \cup 7 \cup 8$;

c) $1 \cup 2 \cup 5 \cup 6$;

d) 7.

16. a) $(X \cup Y) \cap Z = 3 \cup 4 \cup 6$ e $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)(3 \cup 4) \cup (3 \cup 6) = 3 \cup 4 \cup 6$

b) $X \cup (Y \cap Z)^c = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 7 \cup 8$ e $X \cup Y^c \cup Z^c = (1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) \cup (1 \cup 4 \cup 7 \cup 8) \cup (1 \cup 2 \cup 5 \cup 8) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 7 \cup 8$

17. A condição $A \subset C$ é necessária para que valha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Com efeito, se $A \subset C$ então $A \cup C = C$, logo $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C$. Reciprocamente, se vale a igualdade $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ então, $A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$, isto é, $A \subset C$. Portanto, vale $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ se, e somente se, $A \subset C$.

18. Observar que $(A-B)-C$ é o conjunto dos pontos de A que não estão em B nem em C, isto é, estão apenas em A, enquanto que $A-(B-C)$ é formado pelos pontos que estão apenas em A mais aqueles que estão em A e em C. Logo $(A-B)-C = A-(B-C)$ se, e somente se, $A \cap C = \emptyset$.

19. Como $(2n)^2 = 2(2n^2)$ e $(2n-1)^2 = 2(2n^2-2n)+1$, vemos que o quadrado de um número par é par e que o quadrado de um número ímpar é ímpar. Todo quadrado perfeito é o quadrado de sua raiz quadrada, portanto esta só pode ser par ou ímpar se o número dado o for. Mais precisamente: se $k = n^2$ então $n = \sqrt{k}$ é par (ou ímpar) se, e somente se k é par (ou ímpar).

20. Dada uma função arbitrária $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$, considere o conjunto $X = \{x \in A\ ;\ x \notin f(x)\}$. Então $X \in \mathcal{P}(A)$ mas não existe $x \in A$ tal que $f(x) = X$, pois a existência de um tal x levaria a uma contradição. Com efeito, ou $x \in X$ ou $x \notin X$. O primeiro caso não pode ocorrer porque $x \in X \Rightarrow x \notin f(x) \Rightarrow x \notin X$. Já no segundo caso, temos $x \notin X \Rightarrow x \in f(x) \Rightarrow x \in X$.

Capítulo 2.

1. Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ a + n \in Y\}$. Como $a \in Y$, segue-se que $a + 1 \in Y$, portanto $1 \in X$. Além disso $n \in X \Rightarrow a + n \in Y \Rightarrow (a + n) + 1 \in Y \Rightarrow n + 1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$. Assim, Y contém todos os números naturais $\geq a$.

2. Seja $Y = \{n \in \mathbb{N};\ 2n + 1 < 2^n\}$. Temos $3 \in Y$. Além disso, $n \in Y \Rightarrow 2n + 1 < 2^n \Rightarrow 2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \in Y$. Portanto Y contém todos os números naturais ≥ 3, ou seja, $n \geq 3 \Rightarrow 2n + 1 < 2^n$. Em seguida, seja $Z = \{n \in \mathbb{N}, n^2 < 2^n\}$. Temos $5 \in Z$ e, além disso,

$$n \in Z \Rightarrow n^2 < 2^n \Rightarrow (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \in Z$$

3. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto que não possui um menor elemento. Considere o conjunto X, formado pelos números naturais n tais que $1, 2, \ldots, n$ não pertencem a A. Então $1 \in X$ pois do contrário pertenceria a A e seria, portanto, o menor elemento de A. Em seguida mostraremos que $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Com efeito, $n \in X \Rightarrow 1, 2 \ldots, n$ não pertencem a A. Se fosse $n + 1 \in A$ então $n + 1$ seria o menor elemento de A, o que não é possível. Logo $1, 2, \ldots, n$, $n + 1$ não pertencem a A, isto é, $n + 1 \in X$. Assim $X = \mathbb{N}$, isto é, $A = \emptyset$.

4. Sabemos que $(\frac{n+1}{n})^2 < 3$. Ignorando isto, mostremos que $(\frac{n+1}{n})^n < n$ para $n \geq 3$. É claro que $(4/3)^3 = 64/27 < 3$. Agora, indução:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{n(n+2)}{n+1} < \frac{n(n+1)}{n} \\ &= n + 1. \qquad C.Q.D.\end{aligned}$$

Escrevendo $(\frac{n+1}{n})^n < n$ sob a forma $(n + 1)^n < n^{n+1}$ vemos que $\sqrt[n+1]{n + 1} < \sqrt[n]{n}$ para $n \geq 3$. Logo $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$ é decrescente a partir do 3º termo.

5. A igualdade indicada é obviamente verdadeira para $n = 1$. Supondo-a válida para um certo n temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Para provar a implicação $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, basta verificar que

$$\frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = (n + 1)^2,$$

o que é imediato

6. O problema resulta do fato de que o "conjunto" dos números naturais pequenos não está bem definido. O "conjunto" dos números pequenos é limitado? Se é, (como deveria) então qual é o maior número pequeno?

7. Por um lado (distributividade à direita), $(m+n)(1+1) = m+n+m+n$.

Por outro lado (distributividade à esquerda, depois à direita), $(m+n)(1+1) = m(1+1)+n(1+1) = m+m+n+n$.

Logo $m+n+m+n = m+m+n+n$.

Pela lei do corte (aplicada duas vezes) $n+m = m+n$.

8. Suponha que seja $X \neq \mathbb{N}$. Seja a o menor elemento do conjunto não-vazio $A = \mathbb{N} - X$. Então todos os números naturais menores do que a pertencem a X. Pela hipótese, segue-se que $a \in X$. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$.

9. Suponha que o conjunto A dos números naturais n para os quais $P(n)$ é falsa seja não-vazio. Então $1 < a$, $2 < a$ e, além disso $P(a-2)$ e $P(a-1)$ são verdadeiras. Segue-se da hipótese (enunciado) que $P(a)$ é verdadeira. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Certamente $1^3 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2$. Suponha, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Para provar que se tem

$$1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2,$$

basta verificar que

$$\frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (n+1)^3$$

ou seja, que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}[(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)] - \frac{1}{4}[n^2 \cdot (n^2+2n+1)] &= (n+1)^3 \\
\frac{1}{4}[\cancel{n}^4 + \cancel{6}n^3 + \cancel{1}3n^2 + 12n + 4 - \cancel{n}^4 - 2\,\cancel{n}^3 - \cancel{n}^2] &= (n+1)^3, \\
\frac{1}{4}[4n^3 + 12n^2 + 12n + 4] &= (n+1)^3, \\
n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &= (n+1)^3.
\end{aligned}$$

Observação: A igualdade $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ pode também ser escrita sob a forma

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

Desta maneira, a indução fica mais fácil

Capítulo 3.

3.1 a) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \therefore A \subset f^{-1}f(A)$

b) $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x),\, x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x),\, f(x) \in B \Rightarrow y \in B \therefore f(f^{-1}(B)) \subset B$.

c) Seja f injetiva. Se $x \in f^{-1}(f(A))$ então $f(x) \in f(A)$, isto é, tem-se $f(x) = f(a)$ para algum $a \in A$, logo $x = a$ e $x \in A$. Assim, $f^{-1}(f(A)) \subset A$ e daí (vide a)) $f^{-1}(f(A)) = A$. Reciprocamente, se $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$ então dados $x_1, x_2 \in X$ com $f(x_1) = f(x_2)$, tomando $A = \{x_1\}$ temos $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$ logo $x_2 = x_1$ e f é injetiva

d) Seja f sobrejetiva. Então, para todo $B \subset Y$, temos:

$$b \in B \Rightarrow b = f(x), \quad x \in X \Rightarrow b = f(x), \quad x \in f^{-1}(B) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(b)).$$

Assim $B \subset f(f^{-1}(B))$. Por b), segue-se que $f(f^{-1}(B)) = B$. Recíprocamente, se $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$ então, tomando $y \in Y$ arbitrariamente e pondo $B = \{y\}$ vemos que $f(f^{-1}(y)) = \{y\}$ logo $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ e $f(x) = y$ qualquer que seja $x \in f^{-1}(y)$. Logo f é sobrejetiva .

3.2. Se existir $g\colon Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ logo f é injetiva. Reciprocamente, se f é injetiva então definimos $f\colon X \to X$ assim: fixamos $x_0 \in X$. Dado $y \in Y$, se não existir $x \in X$ tal que $f(x) = y$, pomos $g(y) = x_0$. Se $y = f(x)$ para algum $x \in X$, este x é único e então pomos $g(y) = x$. A função $g\colon Y \to X$ cumpre $g(f(x)) = X$.

3.3. Se existir $g\colon Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ então, para todo $y \in Y$ tem-se $y = f(x)$, com $x = g(y)$, logo f é sobrejetiva. Reciprocamente, se f é sobrejetiva então, para cada $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é $\neq \emptyset$. Escolhemos $x \in f^{-1}(y)$ e pomos $g(y) = x$. A função $g\colon X \to X$ cumpre $f(g(y)) = y$.

3.4. Para todo $y \in Y$, pondo $h(y) = x$, temos

$$g(y) = g(f(h(y))) = g(f(x)) = x = h(y).$$

3.5. Escrevendo $n = 2^a \cdot b$ com $a, b \in \mathbb{N}$, b ímpar, defina $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(n) = a$. Como a decomposição $n = 2^a \cdot b$, b ímpar, é única, f está bem definida. Como a é qualquer, f é sobrejetiva. Como há infinitos números impares b, para cada a existem infinitas soluções $n = 2^a \cdot b$ para a equação $f(n) = n$.

3.6. Isto é claro se $n = 1$. Supondo verdadeira a afirmação para conjuntos com n elementos, seja X um conjunto com $n+1$ elementos. Fixe um elemento $a \in X$. Uma bijeção $f\colon X \to X$ consiste em escolher $a' = f(a)$ e definir uma bijeção de $X - \{a\}$ sobre $X - \{a'\}$. Existem $n+1$ escolhas possíveis para a' e (por indução) $n!$ possíveis bijeções de $X - \{a\}$ sobre $X - \{a'\}$. Segue-se que há $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ bijeções de X.

3.7. O erro consiste na passagem $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, que é falsa quando $n = 1$. (Não é verdade que $P(1) \Rightarrow P(2)$. Mais exatamente: $P(2)$ é certamente falsa.)

3.8. Seja $P(n)$ a afirmação de que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Então $P(1)$ é verdadeira pois se $X = \{a\}$ então ϕ e $\{a\}$ são os dois únicos subconjuntos de X. Supondo $P(n)$ verdadeira, seja X um conjunto com $n+1$ elementos. Fixando $a \in X$, seja $X' = X - \{a\}$. Há dois tipos de subconjuntos de X: as partes de X' (em número de 2^n) e os subconjuntos que contêm a (também são 2^n deles). Como $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, segue-se $P(n+1)$.

3.9. $P(2)$ é óbvio pois uma só pesagem é suficiente para saber, entre dois objetos, qual é o mais leve e qual o mais pesado. Supondo $P(n)$ verdadeira, efetuamos $2n-3$ pesagens e encontramos, entre n objetos dados, o mais leve L e o mais pesado P. Agregando-se o $(n+1)$-ésimo objeto, basta efetuar duas pesagens mais, comparando-o com L e com P. Se ele for mais leve do que L, será o mais leve dos $n+1$ novos objetos. Se for mais pesado que P também o problema estará resolvido. Se for mais pesado que L e mais leve que P então L e P continuarão sendo o mais leve e o mais pesado. $2n-3$ é o menor número possível para resolver o problema, como se vê considerando três objetos de pesos $1, 2$ e 3. Comparando 1 com 2 e com 3 ficamos sem saber qual é 1 e qual é 2.

3.10. $P(1)$ é claro. Suponhamos todos os subconjuntos de um conjunto X com n elementos dispostos numa fila, de modo que cada um desses subconjuntos difira do anterior pelo acréscimo ou pela retirada de um elemento. Tomemos um $(n+1)$-ésimo elemento e estendamos a fila acrescentando-o, na ordem inversa, a cada subconjunto da fila anterior, começando com o último. Desta maneira obteremos todos os subconjuntos de X dispostos como está prescrito no enunciado.

Capítulo 4.

4.1. É claro que $0 \in A$ mas não pertence a B nem a $C \cap D$ nem a E. Logo $0 \in ((A-B)-(C\cap D))-E$.

4.2. (a) A implicação $\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x+3 > 4x+2$ é obtida multiplicando a primeira desigualdade por $2x+1$. Portanto só é válida quando $2x+1>0$, ou seja, quando $x > -1/2$. A maneira correta de resolver esta inequação é separar 2 casos: $x > -1/2$ e $x < -1/2$. (Evidentemente, não tem sentido pôr $x = -1/2$.) No primeiro caso, a solução é $x > -1/2$ e $x > -1$, logo $x > -1/2$. No segundo caso, para $x < -1/2$, tem-se $2x+1 < 0$ logo vale:

$$\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x+3 < 4x+2 \Rightarrow x < -1$$

Então $x < -1/1$ e $x < -1$, logo $x < -1$.

A resposta é $x < -1$ ou $x > -1/2$. Equivalentemente: $x \notin [-1, -1/2]$.

(b) As implicações estão todas corretas: a primeira resulta de multiplicar ambos os membros da desigualdade por x^2+1, que é sempre > 0 para todo x. A segunda consiste em somar $-2x^2$ a ambos os membros. Valem as implicações opostas, em (a) e (b).

4.3. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + cd = (a+c)d < (b+d)c \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Analogamente, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Uma possível interpretação de $\frac{a+c}{b+d}$ é a seguinte: na primeira fase de um compeonato foram realizados b jogos com um total de a gols convertidos. O número médio de gols por partida foi $\frac{a}{b}$. Na segunda fase, houve c gols em d partidas. Média de gols por partida na segunda fase: $\frac{c}{d}$. Média de gols por jogo no compeonato inteiro: $\frac{a+c}{b+d}$. Tem-se claramente $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4.4. Como $1^3 < 3 < 2^3$, temos $\sqrt[3]{3} = 1, \ldots$ Além disso,$1,1^3 = 1,33$; $1,2^3 = 1,72$; $1,3^3 = 2,19$; $1,4^3 = 2,74$ e $1,5^3 = 3,37$. Logo a aproximação pedida para $\sqrt[3]{3}$ é $1,4$

4.5. No cálculo numérico, quando se deve efetuar uma divisão cujo dividendo é irracional, usa-se um valor aproximado do denominador. Se quisermos obter um grau de aproximação maior para o quociente, toma-se uma aproximação melhor para esse denominador e é-se obrigado a refazer a operação desde o início. Se, entretanto, a irracionalidade estiver no numerador apenas, basta prolongar a divisão acrescentando mais algarismos decimais ao dividendo, sem precisar recomeçar tudo de novo. Compare, por exemplo, as operações $1/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/2$. Evidentemente, estamos falando de operações efetuadas manualmente. No caso de cálculo eletrônico, não há quase diferença alguma. Aqui deve-se ter cuidado apenas com denominadores muito pequenos (em relação ao numerador), onde uma pequena variação dos quais pode causar grande alteração no quociente.

4.6. O número 0 pertence a todos os intervalos $[0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Nenhum outro número real $x > 0$ pode pertencer a todos esses intervalos porque, dado $x > 0$ podemos sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/x$, donde $x > 1/n$, portanto $x \notin [1, 1/n]$. [Um modo prático de obter um número natural $n > x$ consiste em tomar a expressão decimal de x, desprezar a parte após a vírgula e pôr $n = 1+$ (a parte inteira de x).]

4.7. O número racional representado pela fração irredutível m/n tem uma expressão decimal finita quando existe um inteiro k tal que $n \cdot k$ seja uma potência de 10. Para isto, é necessário e suficiente que seu denominador seja da forma $n = 2^a \cdot 5^b$. Por outro lado, se n é primo com 10 (isto é, não é divisível por 2 nem por 5) então $\frac{m}{n}$ gera uma dízima periódica simples. Com efeito, algum múltiplo de n tem a forma $99\ldots 90\ldots 0$ mas, como n é primo com 10, se n divide $99\ldots 9 \times 10^r$, divide o fator $99\ldots 9$. Logo podemos afirmar que n tem um múltiplo tipo $99\ldots 9$. Se $n \cdot k = 99\ldots 9$ então $\frac{mk}{nk} = \frac{mk}{99\ldots 9} =$ geratriz de uma dízima periódica simples.

4.8. Como $0,1234567\ldots$ não é periódico, trata-se de um número irracional.

4.9. a) $|x-1| < 4$ significa que a distância de x a 1 é menor do que 4. Logo $|x-1| < 4 \Leftrightarrow x \in (-3,5) = (1-4, 1+4)$

b) $|x+1| < 2 \Leftrightarrow$ distância de x a -1 é menor do que $2 \Leftrightarrow x \in (-3,1) = (-1-2, -1+2)$

c) $|x-1| < |x-5| \Leftrightarrow x$ está mais próximo de 1 do que de 5. O ponto equidistante de 1 e 5 é $x = 3$. Logo deve ser $x < 3$.

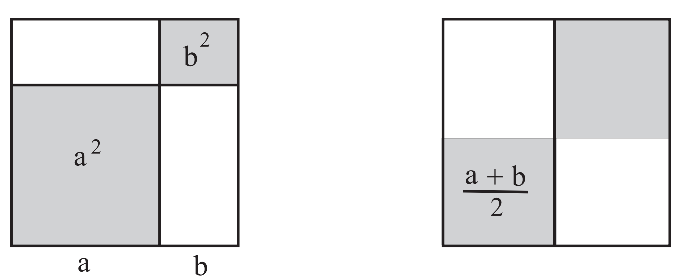
d) $|x-2| + |x-4| = 8 \Leftrightarrow$ (distância de x a 4) + (distância de x a 2) = 8. Evidentemente, x não pode estar entre 2 e 4. Logo há duas possibilidades: $x > 4$ ou $x < 2$. No primeiro caso $x-2+x-4 = 8$, $x = 7$. No segundo caso, $2-x+4-x = 8$, $x = -1$.

e) $|x-2| + |x+4| = 1$. Novamente, x não pode estar entre 2 e 4 porque neste caso a soma das distâncias de x a 2 e a 4 seria sempre 2. Se x estiver à direita de 4, sua distância a 2 será pelo menos 2. Se x estiver à esquerda de 2 então sua distância a 4 será ≥ 2. Assim, a equação $|x-2| + |x+4| = 1$ não tem solução.

4.10. $\dfrac{a^2+b^2}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0.$

Logo $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2.$

Interpretação geométrica:



4.11. Se $1,4587 < x < 1,4588$ e $0,1134 < y < 0,1135$ então, multiplicando membro a membro estas desigualdades obtemos $0,16541 < xy < 0,16557$. Tomando os inversos multiplicativos nas desigualdades que envolvem y, temos

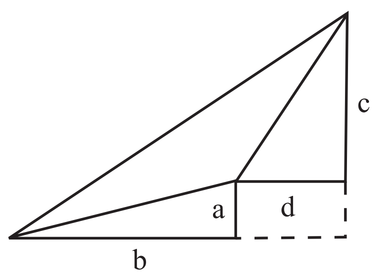
$$8,8105 < y^{-1} < 8,8183.$$

Portanto (multiplicando estas desigualdades por aquelas que envolvem x) resulta que

$$12,851 < \frac{x}{y} < 12,864.$$

Assim, vemos que $xy = 0,165$ com 3 algarismos decimais exatos e erro inferior a 1 décimo milésimo, por falta. Por outro lado, $\frac{x}{y} = 12,8$ com 1 algarismo decimal exato e erro inferior a 1 centésimo, por falta.

Interpretação geométrica do Exercício 4.3.



$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Capítulo 5.

5.1. Menor do que o dobro, pois na segunda metade da corrida não foi cobrada a bandeirada. Algebricamente: se $f(x) = ax + b$ então $f(2x) = 2ax + b$ enquanto $2 \cdot f(x) = 2ax + 2b$.

5.2. Ao dizer que "a escala é linear", estamos afirmando que a deslocamentos iguais ao longo da linha correspondem acréscimos iguais nos números acima dessa linha. Se x é a distância de um ponto ao extremo esquerdo da linha e $f(x)$ é o número acima desse ponto, então $f(x) = ax+b$. Como $f(0) = 17$ e $f(8) = 59$, temos $b = 17$ e $8a + 17 = 59$, donde $a = 5,25$. Portanto $f(3) = 3 \times 5,25 + 17 = 32,75$.

5.3. Temos $N = aC + b$. Sabemos que $0 = 18a + b$ e $100 = 43a + b$. Logo $a = 4$ e $b = -72$. Segue-se que $N = 4C - 72$. Daí $C = 100 \Rightarrow N = 328$.

5.4. O volume $V(t)$ de água na caixa no instante t é $V(t) = 1000 - at$. Sabemos que $V(6) = 850$, logo $1000 - 6a = 850$ e daí $a = 25$. Portanto $1000 - 25t = 500 \Rightarrow t = 20$, ou seja, a água ficará pela metade após 20 horas, o que ocorrerá às 8 da manhã do dia seguinte.

5.5. Podemos imaginar que o garoto começou com um palito (vertical) e, para cada quadrado que armou, precisou de 3 palitos. Logo, para fazer n quadrados ele precisou de $3n+1$ palitos. Alternativa: ele usou 4 palitos para fazer o primeiro quadrado e mais 3 para fazer cada quadrado subseqüente. Assim, n quadrados requererão $4 + 3(n - 1) = 3n + 1$ palitos.

5.6. a) Um operário, trabalhando as mesmas 8 horas diárias, construiria o mesmo muro em $5 \times 3 = 15$ dias, logo 5 operários, em iguais condições, fariam o mesmo serviço em $15 \div 5 = 3$ dias. Se o muro tivesse 15 metros, esses mesmos 5 operários, nas mesmas condições, terminariam o trabalho em $(3/36) \times 15 = 5/4$ dias. Finalmente, esses 5 operários, trabalhando 6 horas por dia (em vez de 8) completariam o muro de 15 metros em $\frac{5}{4} \times \frac{8}{6} = \frac{5}{3}$ dias (1 dia e 16 horas).

b) As hipóteses utilizadas implicitamente acima foram de que o tempo necessário para fazer o muro é diretamente proporcional ao tamanho do mesmo e inversamente proporcional ao número de operários e ao número de horas diárias de trabalho.

c) $D = k \cdot \frac{C}{N \cdot H}$, onde k é a constante de proporcionalidade. Sabemos que, pondo $C = 36$, $N = 3$ e $H = 8$, temos $D = 5$. Então $5 = k \cdot \frac{36}{3 \cdot 8}$, donde $k = \frac{10}{3}$. Portanto, a fórmula procurada é $D = \frac{10}{3} \cdot \frac{C}{N \cdot H}$.

5.7. a) $F = k \cdot m_1 m_2 / d^2$

b) $pv = c \cdot t$

c) $r = k \cdot \ell / s$

d) $\Delta \ell = k \cdot \ell \cdot \Delta t$

5.8. Temos $Y = k/X$, onde k é a constante de proporcionalidade. Seja $X' = \frac{125}{100} X = \frac{5}{4} X$. Então $Y' = \frac{k}{X'} = \frac{4}{5} \frac{k}{X} = \frac{4}{5} Y = 80\%$ de Y. Logo Y sofre um decréscimo percentual de 20%.

5.9. A função afim a que se refere o enunciado é $f(x) = a_1 + (n - 1)r$, onde r é a razão da P.A., mas o exercício não precisa desta fórmula para ser resolvido. Basta saber que f existe.

a) Esse trapézio tem altura 1 e base média a_i, logo sua área é $1 \cdot a_i = a_i$.

b) $a_1 + \cdots + a_n$ é a área desse trapézio maior porque ele é a justaposição dos trapézios de altura 1 considerados no item anterior.

c) $\frac{a_1+a_n}{2}$ é a base média do trapézio maior porque

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{f(1) + f(n)}{2} = \frac{f(1 - \frac{1}{2}) + f(n + \frac{1}{2})}{2}$$

pois a função afim f tem a propriedade $f(x - h) + f(x' + h) = f(x) + f(x')$. Como a altura desse trapézio é $n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n$, o resultado segue-se.

5.10. Seja d o número de degraus da escada, a qual sobe com a velocidade de s segundos para cada degrau. Ficando parada, a pessoa leva ds segundos para subir a escada. Logo, pelos dados do problema,

$$(d - 5)s = 30 \quad \text{e} \quad (d - 10)s = 20.$$

Assim $s = \frac{30}{d-5} = \frac{20}{d-10}$ e daí $30d - 300 = 20d - 100$ o que resulta em $d = 20$. A escada tem 20 degraus, gasta $s = 20/(d - 10) = 20/10 = 2$ segundos para subir cada degrau. Logo, o tempo normalmente gasto no percurso é de $2 \times 20 = 40$ segundos.

5.11. Na 5ª loja, Augusto gastou metade do que tinha e ainda lhe sobraram 22 reais. Logo entrou na 5ª loja com 44 reais. Ao entrar na 4ª loja, ele tinha 88 reais; na 3ª tinha 176; na 2ª, 352; na 1ª 704. Augusto começou as compras com R$ 704,00. (Supondo um só estacionamento para todas as lojas.) Caso tenha pago o estacionamento após cada compra a resposta será R$ 764,00

5.12.

5.13. $25 + x + x = 95$, $x = 35$, $25 + 35 = 60$. Com 60 anos .

5.14. A média antes da prova final é $(4 \cdot 2 + 6 \cdot 3)/5 = 5,2$. A nota n que ele precisa tirar satisfaz $(5,2 \cdot 3 + n \cdot 2)/5 \geq 5$. Daí, $n \geq 4,7$.

5.15. Sejam A, B e C respectivamente o número de reais que Arnaldo, Beatriz e Carlos possuiam. Foram feitas 3 transferências. Após a primeira, as quantias com que eles ficaram (sempre na ordem alfabética) foram $A - B - C$, $2B, 2C$. Após a segunda operação: $2A - 2B - 2C$, $2B - (A - B - C) - 2C, 4C$, ou seja: $2A - 2B - 2C$, $3B - A - C, 4C$. E, no final: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$, $4C - (2A - 2B - 2C) - (3B - A - C)$, isto é: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$ e $7C - A - B$. Agora é só resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16, \end{cases}$$

o que nos dá $A = 26$ reais, $B = 14$ reais e $C = 8$ reais.

Fazer também a solução via “trás-pra-diante”.

5.16. Sejam v a velocidade do carro que sai de A e w a velocidade do carro que sai de B (medidas em metros p/minuto). Após t minutos de viagem eles se encontram a 720m de A. Então $vt = 720$ e, chamando de d a distância entre A e B, temos (com o mesmo t) $wt = d - 720$. Eliminando t, vem: $\frac{v}{w} = \frac{720}{d-720}$. Seja t' o tempo decorrido desde o início do percurso até o segundo encontro dos carros. Levando em conta os 10 minutos em que cada carro esteve parado, temos $v(t'-10) = d + 400$ e $w(t'-10) = 2d - 400$. Dividindo membro a membro estas duas igualdades resulta $\frac{v}{w} = \frac{d+400}{2d-400}$. Comparando, obtemos $\frac{720}{d-720} = \frac{d+400}{2d-400}$. Segue-se imediatamente que $d = 1760$.

5.17. Seja t minutos o tempo gasto pelo pedestre para ir de A a B. Até chegar a B, ele foi ultrapassado por 16 trens (contando com o último, que chegou junto com ele). Este último trem saiu de A $16 \times 3 = 48$ minutos após o pedestre, logo levou $t - 48$ minutos para ir de A a B. Sejam v a velocidade do pedestre e w a dos trens. Então $w(t-48) = vt = 3km$.

Por outro lado, o primeiro trem que cruzou com o pedestre (na direção contrária) saiu de B $22 \times 3 = 66$ minutos antes do trem que estava saindo de B no momento em que chegava o pedestre. Logo, o tempo que aquele primeiro trem gastou para ir de B até A foi $66 - t$ minutos. (Saiu há 66 minutos mas já chegou há t minutos.) Então $w(66-t) = vt = 3km$.

Assim, $t - 48 = 66 - t$, donde $t = 57$ minutos e $t - 48 = 9$ minutos. Como $w(t-48) = 3k$, segue-se que $w = \frac{1}{3}\frac{km}{min} = 20km/h$. A velocidade dos trens é, portanto, $20km$ por hora. A velocidade do pedestre é $v = 3/t = \frac{3}{57}km$ por minuto, ou seja $\frac{180}{57}km/h = \frac{60}{19}\frac{km}{hora}$.

5.18. a) Desloque o gráfico uma unidade para baixo.

b) Idem uma unidade para a direita.

c) Imagem refletida do gráfico em torno do eixo Y.

d) Duas semi-retas com origem no ponto $(1,-2)$. Uma passa pelo ponto $(0,2)$ e a outra por $(2,0)$.

e) Duas semi-retas com origem no ponto $(\frac{1}{2},-1)$. Uma passa por $(0,1)$ e a outra por $(1,0)$.

f) Uma figura W, formada a partir do gráfico de f, refletindo a parte que tem $y < 0$ em torno do eixo X.

g) A parte do gráfico que tem $x > 0$ mais a reflexão dessa mesma parte em torno do eixo Y.

h) O gráfico de f, com a parte que tem $y < 0$ substituída pelo intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$ do eixo X.

5.19. a) $\emptyset$; b) $\mathbb{R}$; c) $x < 8/3$; d) $x > 1$; e) $x \in \{1,3\}$; f) $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; g) $x = \pm\frac{3}{2}$; h) $x \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$.

5.20. $x \in [0,1) \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$

5.21. $[8/3, +\infty)$

5.22. a) O ângulo reto com vértice no ponto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e lados passando pelos pontos $(-1,0)$ e $(4,0)$.

b)As semi-retas horizontais $S = \{(x,-2);\ x \leq -1\}$ e $S' = \{(x,2);\ x \geq 1\}$, juntamente com o segmento de reta que liga os pontos $A = (-1,-2)$ a $B = (1,2)$, os quais são as origens dessas semi-retas.

5.23. a) O quadrado cujos vértices são os pontos $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ e $D = (0,-1)$.

b) As duas retas $y = x + 1$ e $y = x - 1$.

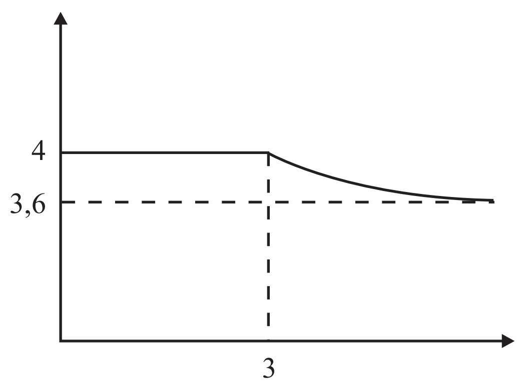
5.24. a) No intervalo $[0, 3)$, o gráfico coincide com o da função $y = 4x$. No intervalo $[3, +\infty)$, o gráfico é o da função $y = 3,6x$.

b) Se $f(x)$ é o preço de x quilos, pede-se o gráfico da função $m(x) = f(x)/x$. Para $0 \leq x < 3$, $m(x)$ é constante, igual a 4, e para $x \geq 3$, $m(x) = 3,6$.

c) Se $2,7 < x < 3$ então, pondo $x' = \frac{4}{3,6}x$, temos $x' > x$ e $f(x') = 3,6x'$ (pois $x' > 3$) portanto $f(x') = 4x = f(x)$.

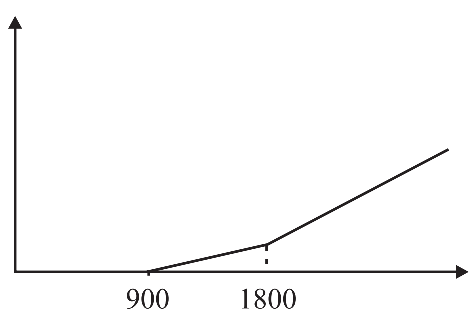
5.25. a) O consumidor paga 12 reais pelos três primeiros quilos e 3,6 reais por cada quilo a seguir. Se $f(x)$ é o preço de x quilos então $f(x) = 4x$ para $0 \leq x \leq 3$ e $f(x) = 12 + 3,6(x - 3)$ para $x > 3$.

b) $f(x)/x = 4$ para $0 < x \leq 3$ e $\frac{1,2+3,6x}{x} = 3,6 + \frac{1,2}{x}$ para $x > 3$.



c) $12 + 3,6(x - 3) = 15 \Rightarrow x = 3,83$ kg.

5.26. Se $f(x)$ é o imposto a pagar para uma base de cálculo de x reais temos $f(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 900$, $f(x) = 0,15x - 135$ para $900 < x \leq 1800$ e $f(x) = 0,25x - 315$ para $x > 1800$.



5.27. a) As parcelas a deduzir são 0, 1320, 3207, 6 e 17468, 1.

b) $0,26 \cdot 5000 = 1300$.

c) Não.

5.29. Para $x \geq 2$, a equação se transforma em $x - 2 = ax + b$, $(1 - a)x = 2 + b$. Daí, $x = \frac{2+b}{1-a}$, se $a \neq 1$. Esse valor $x = \frac{2+b}{1-a}$ será solução desde que $\frac{2+b}{1-a}$? 2, ou seja, desde que $\frac{b+2a}{1-a}$? 0.

Para $x < 2$, a equação se transforma em $2 - x = ax + b$, $(1+a)x = 2 - b$. Daí, $x = \frac{2-b}{1+a}$, se $a \neq -1$. Esse valor $x = \frac{2-b}{1+a}$ será solução desde que $\frac{2-b}{1+a} < 2$, ou seja, desde que $\frac{b+2a}{1+a} > 0$.

Se $a = 1$ e $b = -2$, a equação possui uma infinidade de soluções (todo $x \geq 2$ é solução). Se $a = 1$ e $b \neq -2$, a equação possuirá uma única solução $x = \frac{2-b}{1+a}$, se $b > -2$ e não possuirá solução se $b < -2$.

Se $a = -1$ e $b = 2$, a equação possui uma infinidade de soluções (todos $x \leq 2$ é solução).

Se $a = -1$ e $b \neq 2$, a equação possuirá uma única solução $x = \frac{2+b}{1-a}$, se $b > 2$ e não possuirá solução se $b < 2$.

Se $a \neq \pm 1$, a equação pode ter duas, uma ou nenhuma solução, conforme

5.30. a) Se $a \leq x \leq c$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c - x + c + x - d] = 0$.

Se $c \leq x \leq d$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c + x - c + x - d] = \alpha(x - c)$.

Como $f(d) = D$ temos $\alpha(d - c) = D$, ou seja, $\alpha = \frac{D}{d-c}$.

Se $d \leq x \leq b$, $f(x) = \frac{\alpha}{2}[d - c + x - c - x + d] = \alpha(d - c) = D$.

O segundo caso é idêntico.

b) A primeira parte, para $-1 \leq x \leq 0$ é construída na forma do item anterior: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0+1}[0 + 1 + |x+1| + |x|] = \frac{1}{2}[1 + |x+1| + |x|]$. Nos outros dois intervalos, $0 \leq x \leq 1$ e $1 \leq x \leq 4$ a construção é a mesma.

5.31. Seja $f(x) = \frac{r_b}{r_a}x + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1$, sendo r_a e r_b as razões das progressões $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. f é afim e $f(a_n) = \frac{r_b}{r_a}a_n + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1 = \frac{r_b}{r_a}(a_n - a_1) + b_1 = \frac{r_b}{r_a}[(n-1)r_a] + b_1 = b_1 + (n-1)r_b = b_n$.

A unicidade é óbvia pois só existe uma função afim f tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$.

5.32. Para x quilômetros, A cobra $100 + x$ reais e B cobra $200 + 0,8x$ reais. O preço de B será menor que o de A para $200 + 0,8x < 100 + x$, ou seja, para $x > 500$.

Para quilometragem superior a 500km, B é mais vantajosa.

Para quilometragem inferior a 500km, A é mais vantajosa.