A Matemática do Ensino Médio, volume 3

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 1

1. A inclinação da reta r é $a = \dfrac{3-2}{7-4} = 1/3$. Como ela passsa pelo ponto $(4,2)$, sua equação é $y = 2 + \dfrac{1}{3}\,(x-4)$, ou $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$, ou ainda $x - 3y = -2$. Portanto:

a) O ponto $(16, k)$ pertence a r se, e somente se, $16 - 3k = -2$, isto é, $3k = 18$, donde $k = 6$.

b) O ponto de r com abcissa 1997 tem ordenada $y = \dfrac{1997+2}{3} = 665\,\dfrac{2}{3}$, logo o ponto $(1997, 666)$ está acima de r.

2. A inclinação desssa reta é $\dfrac{0-b}{a-0} = -b/a$. Ela passa pelo ponto $(a, 0)$. Logo, sua equação é $y = 0 - \dfrac{b}{a}(x-a) = -\dfrac{b}{a}\,x + b$, ou então $bx + ay = ab$. Usualmente, esta equação é escrita sob a forma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Evidentemente, estamos supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Se um destes dois números é zero, a reta coincide com um dos eixos. Se ambos forem zero, qualquer reta que passe pela origem resolve o problema.

3. As coordenadas do ponto $P = (x, y)$ são $x = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) a + \dfrac{1}{3}\, b$ e $y = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) a' + \dfrac{1}{3}\, b'$, ou seja, $x = (2a+b)/3$ e $y = (2a'+b')/3$.

4. Sejam $A = (a, a')$, $B = (b, b')$ e $C = (c, c')$ os vértices do triângulo e $M = \left(\dfrac{b+c}{2}, \dfrac{b'+c'}{2}\right)$ o ponto médio do lado BC. O ponto P da mediana AM tal que $d(P,M)/d(A,M) = 1/3$ tem coordenadas $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{b+c}{2} + \dfrac{1}{3}\, a = \dfrac{a+b+c}{3}$ e $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{b'+c'}{2} + \dfrac{1}{3}\, a' = \dfrac{a'+b'+c'}{3}$, logo $P = \left(\dfrac{a+b+c}{3}, \dfrac{a'+b'+c'}{3}\right)$. Se calcularmos as coordenadas dos pontos das outras medianas que as dividem na mesma razão encontraremos que esses pontos coincidem com P. Logo P está nas 3 medianas.

5. Admitindo que os vértices A, B, C e $D = (x, y)$ são enumerados consecutivamente, AC e BD são as diagonais do paralelogramo logo seus pontos médios coincidem. Temos então $\frac{a+c}{2} = \frac{b+x}{2}$ e $\frac{a'+d}{2} = \frac{b'+y}{2}\cdot$ Daí vem $x = a + c - b$ e $y = a' + c' - b'$. Estas são as coordenadas do quarto vértice D.

6. Escolhendo os eixos de modo que $A = (0, 0)$ e $B = (b, 0)$, os outros dois vértices do paralelogramo $ABCD$ são $C = (c, c')$ e $D = (d, c')$. Como AD e BC têm a mesma inclinação, temos $c'/d = c'/(c-b)$, donde $c = b+d$. As coordenadas do ponto médio da diagonal AC são $c/2$ e $c'/2$, enquanto as da diagonal BD são $(b + d)/2$ e $c'/2$. Logo esses pontos médios coincidem.

Reciprocamente, se os pontos médios das diagonais coincidem então $c = b + d$ e $c' = d'$, logo o segmento CD é horizontal (portanto paralelo a AB) e, como $c-b = d$, BC e AD têm inclinações iguais, portanto são paralelos e o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

7. Dado o triângulo ABC, tome um sistema de coordenadas no qual $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (c, c')$. Os pontos médios de AC e BC são respectivamente $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$ e $N = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$. M e N têm ordenadas iguais, logo MN é paralelo ao eixo das abcissas, isto é, a AB. Além disso, é claro que $\overline{MN} = |c|/2 = \overline{AB}/2$.

8. Dado o trapézio $ABCD$, no qual os lados paralelos são AB e CD, tome um sistema de eixos de modo que $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, c')$ e $D = (d, c')$. Os pontos médios dos lados AD e BC são respectivamente $M = \left(\frac{d}{2}, \frac{c'}{2}\right)$ e $N = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c'}{2}\right)$. Na escolha dos eixos, podemos admitir que $b > 0$ e $c > d$. Então os comprimentos dos lados paralelos são $\overline{AB} = b$, $\overline{CD} = c - d$ enquanto o segmento MN tem comprimento $\overline{MN} = (b + c - d)/2$. Logo $\overline{MN} = (\overline{AB} + \overline{CD})/2$.

9. Dado o quadrilátero $ABCD$, com $A = (a, a')$, $B = (b, b')$, $C = (c, c')$ e $D = (d, d')$, sejam M, N, P, Q respectivamente os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA. As diagonais do quadrilátero $MNPQ$ são os segmentos MP e NQ, cujos pontos médios concidem pois suas coordenadas são $\dfrac{a+b+c+d}{2}$, $\dfrac{a'+b'+c'+d'}{2}\cdot$ Logo $MNPQ$ é um paralelogramo.

10. Escolhe-se um sistema de coordenadas no qual A é a origem e AB está sobre o eixo das abcissas. Então $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (b + d, c)$ e $D = (d, c)$. Logo $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = b^2 + (d^2 + c^2) + b^2 + (d^2 + c^2) = 2(b^2 + c^2 + d^2)$. Esta é a soma dos quadrados dos lados do paralelogramo $ABCD$. A soma dos quadrados das diagonais é $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (b + d)^2 + c^2 + (b - d)^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2 + d^2)$.

11. Um ponto $P = (x, y)$ pertence ao lugar geométrico procurado se, e somente se, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - r)^2 + (y - 1)^2$. Simplificando, obtém-se $2x - y = -4$, portanto o lugar geométrico é uma reta.

12. A equação procurada é $y^2 = x^2 + (y-2)^2$. Simplificando, tem-se $x^2 - 4y + 4 = 0$, ou ainda, $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$. (Equação de uma parábola.)

13. Um sistema de coordenadas que simplifica as contas e trata igualmente os pontos A e B é aquele em que $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$. O ponto $P = (x, y)$ pertence ao lugar geométrico procurado se, e somente se, $(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k^2$, ou seja (simplificando): $x^2 + y^2 = \dfrac{k^2}{2} - a^2$. (Note que $d(A, B) = 2a$.) Se $k^2 < 2a^2$, o lugar geométrico é vazio. Se $k^2 = 2a^2$, o único ponto nele contido é a origem, isto é (nos termos do problema proposto), o ponto médio do segmento AB. E se $k^2 > 2a^2$, o lugar geométrico é a circunferência cujo outro é o ponto médio do segmento AB e cujo raio mede $\sqrt{k^2 - 2a^2} = \sqrt{k^2 - d(A, B)^2/2}$.

14. Procedendo como acima, encontramos que a equação do lugar geométrico procurado é $(x + a)^2 + y^2 - (x - a)^2 - y^2 = k^2$, ou seja, $4ax = k^2$, ou ainda, $x = k^2/4a$. O lugar geométrico procurado é, portanto, uma reta perpendicular ao segmento AB. O problema tem solução seja qual for o valor de k.

15. Sejam $A = (5, 5)$ e $B = (1, 7)$. Estes pontos estão sobre as retas $y = x$ e $y = 7x$ respectivamente, ambos à distância $\sqrt{50}$ da origem 0. Logo o triângulo OAB é isósceles e $M = (3, 6)$, ponto médio do lado AB, é o pé da mediana OM, logo OM é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$. Portanto a equação da bissetriz é $y = 2x$. Como o ângulo $A\widehat{O}B$ é agudo (contido no 1º quadrante) ele é o menor ângulo formado pelas duas retas dadas.

16. O lugar geométrico que se pede é a bissetriz do menor ângulo formado pelas retas $y = x$ e $y = 1$.

17. Temos $A = (0, y)$ e $B = (x, 0)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\overline{AB} = 1$, logo $x^2 + y^2 = 1$. O ponto médio de AB é $M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Portanto, ao variar x e y (mantendo $x^2 + y^2 = 1$), M descreve a circunferência de centro na origem e raio $1/2$.

18. Temos $Q = (2, y)$ e $P = (x, xy)$, logo $\overline{OP}^2 = x^2 + \frac{x^2y^2}{4} = x^2\left(1 + \frac{y^2}{4}\right)$ e $\overline{OQ}^2 = 4 + y^2$. Então $\overline{OP}^2 \cdot \overline{OQ}^2 = 4x^2\left(1 + \frac{y^2}{4}\right)^2$ e a equação $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 4$ se escreve, em termos de coordenadas, como $x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{4}\right) = 2$. Portanto o lugar geométrico pedido é o gráfico da função $x = 2/(1 + y^2/4)$. Ele é uma curva que se estende verticalmente. Para $y < 0$, x é uma função crescente de y, com máximo igual a 2 para $y = 0$ e decrescente se $y > 0$. O eixo vertical é uma assíntota, tanto quando $y \to -\infty$ como para $y \to +\infty$.

19. Se $P = (x, y)$ então $Q = (x/3, y/3)$. Como Q pertence à reta r, temos $a(x/3) + b(y/3) = c$, donde $ax + by = 3c$. Esta é a equação do lugar geométrico dos pontos P, o qual é, portanto, uma reta paralela a r.

20. Para que as retas dadas sejam paralelas, devemos ter $\frac{2}{3} = \frac{5}{k}$, donde $k = 7,5$.

21. As retas $2x + 3y = 8$ e $4x + 7y = 18$ têm em comum o ponto $(1, 2)$ pois $x = 1$, $y = 2$ é a solução do sistema formado pelas equações que as representam. A fim de que a reta $5x + my = 3$ contenha o ponto $(1, 2)$, deve ser $5 \cdot 1 + m \cdot 2 = 3$, donde $m = -1$.

22. A inclinação de AB é $\frac{0-4}{3-1} = -2$. O ponto médio de AB é $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$. A mediatriz de AB é a reta perpendicular a AB (portanto de inclinação $1/2$) passando por M. Sua equação é $y = 2 + \frac{1}{2}(x-2)$, ou seja, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

23. O ponto procurado é a interseção da reta $x + 3y = -15$ com a mediatriz do segmento AB. Ora, a equação da mediatriz é $y = \frac{1}{2}x + 1$, como vimos acima. Resolvendo o sistema formado por estas duas equações obtemos $x = -36/5$ e $y = -13/5$. Estas são as coordenadas do ponto procurado.

24. Seja A^* o ponto procurado. A reta r, de equação $x + 2y = 1$, é a mediatriz do segmento AA^*. A inclinação da reta AA^* é, portanto, igual a 2. Ela passa pelo ponto $A = (3, 4)$, logo sua equação é $2x - y = 2$. Resolvendo o sistema $x + 2y = 1$, $2x - y = 2$ encontramos a interseção $M = (1, 0)$ das retas r e AA^*. M é o ponto médio do segmento AA^*. Logo $A^* = (-1, -4)$.

25. A área do triângulo ABC é o valor absoluto da metade do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3-1 & 7-1 \\ 4-1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, logo é igual a 7.

26. Considere o sistema de coordenadas no qual $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$ e $M = (1/2, 1)$. Então os vetores $u = \overrightarrow{MA}$ e $v = \overrightarrow{MB}$ têm coordenadas $u = (-1/2, -1)$ e $v = (1/2, -1)$, logo seu produto interno é $\langle u, v\rangle = (-1/2)(-1) + (-1)(-1) = 3/4$. Por outro lado, $|u| = \sqrt{5/4} = |v|$, logo $\langle u, v\rangle = |u|\,|v| \cos\alpha = (5/4) \cdot \cos\alpha$. Assim, $(5/4) \cdot \cos\alpha = 3/4$, portanto $\cos\alpha = 3/5$. (Estamos escrevendo

$\alpha = A\widehat{M}B$.)

27. Sejam $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ e $C = (9, y)$. Quer-se determinar o quarto vértice D do retângulo $ABCD$. Temos $u = \overrightarrow{BA} = (-1, 2)$ e $v = \overrightarrow{BC} = (6, y - 1)$. Como $\langle u, v\rangle = (-1) \cdot 6 + 2(y - 1) = 0$, concluímos que $y = 4$, logo $v = (6, 3)$. Assim $u + v = (5, 5)$ e $D = B + u + v = (8, 6)$.

28. Sabemos que $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$, portanto $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\big(|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2\big)$. Pelos dados do exercício, temos então $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(36 - 16 - 25) = -5/2$.

29. Conhecemos os vértices $A = (5, 1)$ e $B = (8, 3)$ do quadrado $ABCD$ no qual A, B, C e D são enumerados no sentido anti-horário. Temos $u = \overrightarrow{AB} = (3, 2)$. Como $v = \overrightarrow{AD}$ é obtido de u por rotação de $90°$ no sentido anti-horário, temos $v = (-2, 3)$. Logo $D = A + v = (5, 1) + (-2, 3) = (3, 4)$. Finalmente $C = B + v = (8, 3) + (-2, 3) = (6, 6)$. Estes são os vértices C e D que faltavam.

30. Seja $M = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{a' + c'}{2}\right)$ o ponto médio de AC. Enumerando os vértices do quadrado $ABCD$ na seqüência anti-horária, se $u = \overrightarrow{MC} = \left(\frac{c - a}{2}, \frac{c' - a'}{2}\right)$ então $v = \overrightarrow{MD} = \left(\frac{a' - c'}{2}, \frac{c - a}{2}\right)$ e $D = M + v = \left(\frac{a + a' + c - c'}{2}, \frac{a' + c' + c - a}{2}\right)$. Por sua vez, $B = M - v = \left(\frac{a - a' + c + c'}{2}, \frac{a + a' = c + c'}{2}\right)$.

31. A projeção ortogonal do ponto A sobre a reta BC, cuja equação é $5x - 8y = -3$, é o ponto de interseção dessa reta com a perpendicular baixada de A sobre ela, a qual tem a equação $8x + 5y = 59$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, encontramos $x = 457/89$, $y = 319/89$, que são as coordenadas da projeção procurada.

32. Fazendo sucessivamente $m = 0$ e $m = 1$ na equação dada, obtemos as retas $y = 2$ e $x = -1$, as quais têm o ponto $P = (-1, 2)$ em comum. Uma substituição direta mostra que, para todo valor real de m, o ponto $P = (-1, 2)$ pertence à reta $mx + (m-1)y + 2 - m = 0$.

33. Tem-se $(x+y-3)(3x-y-1) = 0$ se, e somente se $x+y-3 = 0$ ou $3x-y-1 = 0$. Logo a equação dada representa o conjunto formado pela reunião das retas $3x-y = 1$ e $x + y = 3$.

34. Escrevendo $x + y - 3 + k(3x - y - 1) = (3k + 1)x + (1 - k)y - k - 3$, vemos que cada R_k é a reta de equação $(3k+1)x + (1-k)y = k+3$. Tomando sucessivamente $k = 0$ e $k = 1$, obtemos as retas $x + y = 3$ e $x = 1$ respectivamente, as quais têm o ponto $P = (1, 2)$ em comum. Vê-se imediatamente que P pertence a todas as retas R_k. Reciprocamente, toda reta r que passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e tem inclinação diferente de 3 (isto é, não é a reta $3x - y - 1 = 0$) é da forma R_k para algum k. Com efeito, se r é vertical e contém P, sua equação é $x = 1$, logo $r = R_1$. E se r, passando por P, não é vertical nem tem inclinação 3, sua equação é $y = mx + 2 - m$, com $m \neq 3$. Por sua vez, se $k \neq 1$, a equação de R_k se escreve como $y = \dfrac{3k+1}{k-1}\,x + \dfrac{k+3}{1-k}\cdot$ Dada a reta r, de equação $y = mx+2-m$ com $m \neq 3$, tomando $k = (1+m)/(m-3)$ temos $(3k+1)/(k-1) = m$ e $(k+3)(1-k) = 2-m$, logo $r = R_k$. Assim o conjunto das R_k é formado por todas as retas que passam pelo ponto $P = (1, 2)$, exceto a reta $y = 3x - 1$.

35. Como $x^3y - xy^3 = xy(x + y)(x - y)$, tem-se $x^3y - xy^3 = 0$ se, e somente se, $xy = 0$, ou $x + y = 0$, ou $x - y = 0$. Portanto a equação dada representa a reunião dos dois eixos e as duas diagonais do plano.

36. As inclinação a e a' são as tangentes dos ângulos que o eixo OX forma com as retas dadas e θ é a diferença entre esses ângulos, ou o suplemento dessa diferença, (o que for agudo entre estes dois). Logo $\operatorname{tg}\theta = |(a - a')/(1 + aa')|$ de acordo com a conhecida fórmula da tangente da diferença.

37. Pelo exercício anterior, com $a = 1$ e $a' = 1/3$, temos $\operatorname{tg}\theta = 1/2$.

38. A distância de um ponto $P = (x, y)$ à reta $8x + 6y = -5$ é $|8x + 6y + 5|/10$. Portanto os pontos do plano que distam 5 dessa reta são os pontos das retas $8x + 6y + 5 = 50$ e $-8x - 6y - 5 = 50$, ou seja $8x + 6y = 45$ e $8x + 6y = -55$, as quais cortam a reta $y = x + 1$ nos pontos $P_1 = (39/14, 53/14)$ e $P_2 = (-61/14, -47/14)$ respectivamente. Estes são os pontos procurados.

39. As retas procuradas passam pelo ponto $(7, 4)$ e não são verticais, logo suas equações são da forma $y = 4 + m(x - 7)$, ou seja, $mx - y = 7m - 4$. O ângulo que uma delas forma com a reta $x - 3y = 0$ tem cosseno igual a $\pm \dfrac{m+3}{\sqrt{10}\sqrt{1+m^2}}\cdot$ Como $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, devemos ter $\dfrac{m+3}{\sqrt{10}\sqrt{1+m^2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donde $\dfrac{m^2+6m+9}{10+10m^2} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $2m^2 - 3m - 2 = 0$. Esta equação nos dá $m = 2$ ou $m = -1/2$. Portanto as retas procuradas são $y = 2x - 10$ e $x + 2y = 15$.

40. Os pontos da reta dada têm coordenadas $(x, 2x)$. Sejam $A = (1, 0)$, $B = (3, 1)$ e $C = (x, 2x)$. A área do triângulo ABC é igual ao valor absoluto de $\dfrac{1}{2}\cdot \det\begin{bmatrix} x-1 & 2x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}(3x + 1)$. Portanto, devemos ter $3x + 1 = 10$ ou $-3x - 1 = 10$. Assim, $x = 3$ ou $x = -11/3$. Os pontos procurados são, por conseguinte $P_1 = (3, 6)$ ou $P_2 = (-11/3, -22/3)$.

41. Sejam $A = (-3, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (0, 6)$. O ortocentro do triângulo ABC é a interseção das 3 alturas. Uma delas é o eixo OY. Outra é a reta AD, que passa por A e é perpendicular a BC. Como a inclinação de BC é -3, a inclinação de AD é $1/3$, logo sua equação é $y = \dfrac{1}{3}(x + 3)$, ou seja, $x - 3y = -1$. Sua interseção com a altura OY é o ponto em que $x = 0$, ou seja, $-3y = -1$, o que nos dá $y = 1/3$. Portanto o ortocentro de ABC é o ponto $(0, 1/3)$.

42. Completando os quadrados, a equação dada se escreve como $(x - \sqrt{m})^2 +$

$(y-6)^2 = 36-2m$. Portanto devemos ter $36-2m > 0$, ou seja $m < 18$. Como ocorre $\sqrt{m}$ entre os dados da questão, deve ser também $m \geq 0$. Assim, a resposta é $0 \leq m < 12$.

43. Sejam $A = (10,7)$, $B = (2,-9)$, $C = (-4,9)$. O centro da circunferência que contém os pontos A, B e C é a interseção das mediatrizes AB e AC. Ora, a mediatriz de A tem equação $x + 2y = 4$ e a equação da mediatriz de AC é $7x - y = 13$. A interseção das duas mediatrizes é o ponto $P = (2,1)$. O raio da circunferência é a distância de P a qualquer dos pontos A, B ou C, logo é AD. A equação pedida é, portanto $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 100$.

44. Subtraindo a segunda equação da primeira encontramos $3x + 6y = 0$, ou seja, $x = -2y$. Portanto, os pontos comuns às duas circunferências cumprem $x = -2y$. Fazendo esta substituição em qualquer das duas equações dadas, chegamos à condição $5y^2 - 2y - 3 = 0$, que só é satisfeita para $y = 6/5$ ou $y = -2/5$. Como $x = -2y$, concluímos que os pontos comuns às duas circunferências são $P_1 = (-12/5, 6/5)$ e $P_2 = (4/5, -2/5)$.

45. Escrita por extenso, a equação da circunferência dada é $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$. Sua interseção com a reta $y = ax$ é definida pela equação $x^2 - 4x + (ax)^2 - 2ax + 4 = 0$, ou seja, $(1+a^2)x^2 - (4+2a)x + 4 = 0$. Para que a reta $y = ax$ seja tangente a Γ, esta última equação deve ter uma só raiz real. A condição para que isto se dê é $(4+2a)^2 - 16(1+a^2) = 0$, o que significa $a = 0$ ou $a = 4/3$. A tangente $y = 0$ é óbvia e o ponto de tangência é $(2,0)$. A tangente $y = 4x/3$ toca Γ no ponto de sua interseção com a reta $y = 1 - \dfrac{3}{4}(x-2)$ que lhe é perpendicular e passa pelo centro $(2,1)$. Fazendo $y = 4x/3$ nesta última equação, obtemos $x = 6/5$ e daí $y = 4x/3 = 8/5$. Portanto $(6/5), 8/5)$ é o ponto de tangência.

46. Substituindo y por bx na equação da circunferência, temos $(1+k^2)x^2 - 20k \cdot$

$x + 36 = 0$. Se $y = kx$ é tangente, esta equação tem uma só raiz real, o que significa $256k^2 = 144$, donde $k = \pm 3/4$.

47. Se o ponto $P = (x, y)$ pertence à circunferência $x^2 + y^2 = 13$ e à reta $x + y = 5$ então $(x+y)^2 = 25$, ou seja $x^2+y^2+2xy = 25$ e daí $2xy = 25-(x^2+y^2) = 25-13 = 12$ e $xy = 6$. Assim, x e y são números cuja soma é 5 e cujo produto é 6. Tem-se $x = 2$, $y = 3$, ou então $x = 3$ e $y = 2$. Os pontos procurados são $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (3, 2)$.

48. Completando os quadrados, vemos que $P(x, y) = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\cdot$ Pondo $A = \left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$, $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ e $Q = (x, y)$, vem $P(x, y) = d(Q, A)^2 - R^2$, portanto $P(x, y) = 0$ é a equação da circunferência de centro A e raio R e os itens a) e b) do exercício resultam imediatamente.

49. Lembrando que a potência de um ponto em relação a uma circunferência é a diferença entre o quadrado da distância desse ponto ao centro da circunferência e o quadrado do raio da mesma, concluímos que a fórmula que expressa a potência dá o mesmo valor, seja qual for o sistema de coordenadas adotado. Não há perda de generalidade, portanto em supor que uma das circunferências tem centro na origem e raio 1 enquanto o centro da outra é $(a, 0)$ e seu raio é R. Sejam (x_0, y_0) e $(x_0, -y_0)$ os pontos de interseção das duas circunferências. A reta que os liga é formada pelos pontos (x_0, y), $y \in \mathbb{R}$. A potência do ponto (x_0, y_0), em relação a ambas circunferências é a mesma, igual a zero. Portanto $x_0^2 + y_0^2 = 1$ e $x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 = R^2$. Então a potência de qualquer ponto (x_0, y) em relação à primeira circunferência é

$$x_0^2 + y^2 - 1 = x_0^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 = y^2 - y_0^2\,.$$

A potência desse mesmo ponto (x_0, y) em relação à segunda circunferência é

$$x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y - R^2 = x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y^2 - (x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2) = y^2 - y_0^2\,.$$

Logo a potência de todos os pontos (x_0, y), $y \in \mathbb{R}$, é a mesma em relação a qualquer das duas circunferências.

50. Seja Q o ponto em que a tangente de origem P toca a circunferência Γ, que tem centro A e raio R. O triângulo APQ é retângulo em Q, logo $d(A,P)^2 = d(P,Q)^2 + R^2$ e daí $d(P,Q)^2 = d(A,P)^2 - R^2 =$ potência do ponto P em relação à circunferência Γ.

51. Sejam $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ os vetores que têm os números dados como coordenadas. Se um deles for zero, a desigualdade proposta é óbvia. Caso contrário, seja α o ângulo entre u e v. Então $|a_1b_1 + a_2b_2| = |\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|\,|\cos\alpha| \leq |u|\,|v| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(g_1^2 + b_2^2)}$. Tem-se igualdade se, e somente se, $\cos\alpha = \pm 1$, o que significa que os vetores u, v são múltiplos um do outro, isto é, $v = tu$, ou seja $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$ para algum t real.

52. Considere um sistema de coordenadadas no qual o vértice do ângulo reto é $A = (0,0)$ e os outros dois vértices são $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$. Os lados do triângulo ABC são tangentes à circunferência inscrita, logo o centro da mesma é o ponto $P = (x, x)$ tal que a distância $d(P, BC)$ é igual a x. Como a equação da reta BC é $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1$, tem-se

$$d(P, BC) = \frac{|\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - 1|}{\sqrt{(1/6)^2 + (1/c)^2}} = \frac{1 - (\frac{x}{b} + \frac{x}{c})}{\sqrt{(1/6)^2 + (1/c)^2}}\,,$$

pois o ponto P está abaixo da reta BC. Resolvendo a equação $d(P, BC) = x$, obtém-se $x = bc/(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})$.

53. Isto é óbvio geometricamente, pois o ângulo entre as duas bissetrizes é a soma das metades de dois ângulos suplementares.

54. (No enunciado do exercício, suprimir "e" na penúltima linha.) Sabemos que a área do paralelogramo é o produto da base pela altura. A base é $|u|e$, se θ é o ângulo entre os vetores u e v, a altura $e|v|\operatorname{sen}\theta$. Portanto

$$A^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = |u|^2 \cdot |v|^2(1-\cos^2\theta) = |u|^2|v|^2 - |u|^2 \cdot |v|^2 \cos\cos^2\theta =$$
$$= |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$

Escrevendo $|u|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $|v|^2 = \gamma^2 + \delta^2$ e $\langle u, v\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta$, concluímos que $A^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) - (\alpha\gamma+\beta\delta)^2 = (\alpha\delta-\beta\gamma)^2$, logo $A = |\alpha\delta - \beta\gamma|$. A área do triângulo que tem u e v como dois de seus lados é, portanto $\dfrac{1}{2}\,|\alpha\delta - \beta\gamma|$.

A Matemática do Ensino Médio, volume 3

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 2

1. A equação de um plano vertical Π é da forma $ax + by = d$. Como o plano vertical Π contém os pontos $(3, 0, 0)$ e $(0, -1, 0)$, devemos ter $3a = d$, $-b = d$ e, por subtração, $3a + b = 0$. Tomando $a = 1$, temos $b = -3$, logo a equação de Π é $x - 3y = d$. Como esta equação é satisfeita quando $x = 3$ e $y = 0$, devemos ter $d = 3$, portanto $x - 3y = 3$ é a equação procurada.

2. A mudança indicada corresponde a trocar y por z (e vice-versa). Um plano horizontal, cuja equação era $z =$ constante, passa a ter equação $y =$ constante portanto é vertical. A afirmação (a) é correta. Um plano vertical, de equçaão $ax+by = d$, passa a ter equação $ax+bz = d$, não é horizontal nas novas coordenadas, a menos que se tenha $a = 0$. Logo (b) é falsa.

3. Como $4 - 1 = 3$, $5 - 2 = 3$ e $6 - 3 = 3$, os pontos da reta AB são os da forma $(1 + 3t, 2 + 3t, 3 + 3t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Assim, AB corta os planos Π_{xy}, Π_{yz} e Π_{xz} respectivamente nos pontos $(-2, -1, 0)$, $(0, 1, 2)$ e $(-1, 0, 1)$.

4. Os pontos de reta AB são da forma $(3 - 4t, 5 - 6t, 2 + 2t)$ e os da reta CD são do tipo $(2 - 2s, 1 + 2s, 5 - 4s)$. Num ponto comum a essas duas retas, devemos ter $2-2s = 3-4t$, $1+2s = 5-6t$ e $5-4s = 2+2t$, ou seja, $2s-4t = -1$, $2s+6t = 4$ e $4s+2t = 3$. As duas primeiras equações dão $s = 1/2$ e $t = 1/2$, valores que também satisfazem a terceira. Logo as duas retas têm em comum o ponto $(1, 2, 3)$.

5. Como $-1 - 3 = -4$, $-1 - 5 = -6$ e $-2 = 2$, as equações paramétricas pedidas são $x = 2 - 4t$, $y = 1 - 6t$, $z = 5 + 2t$.

6. Temos $AB = \{(1+2t, 2-3t, 3+t); t \in \mathbb{R}\}$ e $CD = \{(2+s, 3-2s, -1+4s); t \in \mathbb{R}\}$. Num ponto comum a essas duas retas, deveríamos ter $1+2t = 2+s$, $2-3t = 3-2s$ e $3+t = -1+4s$. Mas estas 3 equações são incompatíveis. Logo AB e CD não têm pontos em comum. Do mesmo modo, vê-se que nenhum dos pares de retas AC e BD, AD e BC tem ponto em comum. Portanto os pontos A, B, C e D não podem estar no mesmo plano, logo as retas AB e CD também não, isto é, são reversas.

7. Tomemos um sistema de coordenadas no qual $A = (a, 0, 0)$ e $B = (-a, 0, 0)$, com $a \neq 0$. Então, dado $P = (x, y, z)$, tem-se $d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow 2ax = -2ax \Leftrightarrow 4ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Portanto os pontos equidistantes de A e B são aqueles da forma $P = (0, y, z)$, os quais constituem o plano vertical Π_{yz}.

8. Seja C tal que B é o ponto médio do segmento AC. A condição $PB \perp AB$ equivale a dizer que P é equidistante de A e C logo significa que os pontos P que a satisfazem formam, junto com B, um plano, a saber, o plano mediador de AC.

9. Para simplificar, tomemos um sistema de coordenadas no qual a reta r seja o eixo OZ, isto é, $r = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$. A esfera S tem equação $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$, onde $A = (a, b, c)$. Os pontos de $r \cap S$ têm coordenadas obtidas fazendo-se $x = y = 0$ nesta equação, o que dá $a^2 + b^2 + z^2 - 2zc + c^2 = R^2$, ou seja, $z^2 - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = 0$. As raízes desta equação, em número de 0, 1 ou 2, dão os pontos de interseção $(0, 0, z)$ de r com S. A fim de que r seja tangente a S, esta equação deve ter uma só raiz, logo seu discriminante deve ser zero. Ora, temos $\Delta = 4c^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2 = R^2)$, de modo que $\Delta = 0$ significa $a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Nestas condições, a equação quadrática em z reduz-se a $z^2 - 2cz + c^2 = 0$, cuja única raiz é $z = c$. O ponto de tangência é $P = (0, 0, c)$ e o raio AP é perpendicular ao eixo OZ, isto é, à reta r.

10. (a) Se um dos vetores é zero, eles são sempre ortogonais. Se ambos são não-nulos, fixando um ponto A no espaço existem $B \neq A$ e $C \neq A$ tais que $v = \overrightarrow{AB}$ e $w = \overrightarrow{AC}$. Então v e w são ortogonais quando os segmentos $AB = AC$ são perpendiculares.

(b) Diz-se que o vetor v é ortogonal à reta r quando, para quaisquer pontos $A, B \in r$, os vetores v e $\overrightarrow{AB}$ são ortogonais.

(c) Analogamente, o vetor v é ortogonal ao plano Π quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in \Pi$, v é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

11. Primeiro deixemos explícito o significado de $\lambda \cdot v$. Seja $v = \overrightarrow{AB}$. Se $\lambda = 0$, então $\lambda \cdot v = 0$. Se $\lambda > 0$ então $\lambda \cdot v = \overrightarrow{AE}$ onde E pertence à reta AB, B e E estão do mesmo lado em relação a A e $d(E, A) = \lambda \cdot d(B, A)$. Se $\lambda < 0$, $\lambda \cdot v = \overrightarrow{AF}$, onde F pertence à reta AB, A está entre B e F, e $d(F, A) = -\lambda \cdot d(B, A)$. Portanto, o vetor $w = \overrightarrow{CD}$ é da forma $\lambda \cdot v$ para algum λ se, e somente se, o segmento de reta orientado CD é equipolente a AE ou a AF, logo AB e CD são paralelos ou colineares.

12. Sejam $u = \overrightarrow{AB} = (2, -3, 1)$ e $v = \overrightarrow{CD} = (1, -2, 4)$. As retas r' e s, que se cortam no ponto C, formam dois ângulos suplementares, θ e $\pi - \theta$. O maior deles é o obtuso, que portanto tem cosseno negativo. Temos $\langle u, v \rangle = 2 \cdot 1 + (-3)(-2) + 1 \cdot 4 = 12$, $|u| = \sqrt{14}$ e $|v| = \sqrt{21}$. Sabemos que $\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, logo $\cos\theta = \langle u, v \rangle \big/ |u| \cdot |v|$. Portanto $\cos\theta = 12/7\sqrt{6}$. Assim, o ângulo θ, entre os vetores u e v, é agudo e daí o maior ângulo entre as retas r' e s mede $\pi - \theta$ radianos e seu cosseno é igual a $-12/7\sqrt{6}$. Olhando a calculadora, vemos que esse ângulo mede $134°24'36''$.

13. A verificação de que $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$ é uma conta imediata. Observamos que as projeções dos vetores v e w sobre o plano Π_{xy} são os vetores $v_{xy} = (\alpha, \beta)$ e $w_{xy} = (\alpha', \beta')$ e que a primeira coordenada de u é, em valor absoluto, a área do paralelogramo cujos lados são v_{xy} e w_{xy}. Observação análoga vale para as demais coordenadas de u. Portanto tem-se $u = 0$ se, e somente se, as projeções de v e w

sobre cada um dos planos Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz} são colineares, ou seja, v e w são colineares.

14. Dado $u = (a, b, c)$, com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, e tomando $v = (-bt, at, 0)$, $w = (act, bct, -1/t)$, é imediato que $\langle u, v\rangle = 0$ e $\langle v, w\rangle = 0$ seja qual for t. Por outro lado, temos $\langle u, w\rangle = a^2ct + b^2ct - c/t$. Lembrando que $a^2 + b^2 = 1 - c^2$, a fim de que seja $\langle u, w\rangle = 0$, devemos ter então $(1 - c^2)ct = c/t$. Admitindo $abc \neq 0$, ou seja, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, tem-se também $c^2 \neq 1$, logo podemos concluir que, para ser $\langle u, w\rangle = 0$, deve-se tomar $t^2 = 1/(1 - c^2)$. Com essa escolha (essas escolhas, na verdade) de t valem também $|v|^2 = (a^2 + b^2)t^2 = (1 - c^2)t^2 = 1$ e $|w|^2 = a^2c^2t^2 + b^2c^2t^2 + 1/t^2 = (1 - c^2)c^2t^2 + 1/t^2 = 1$. Examinando o argumento, vê-se que bastaria admitir que $c \neq 0$ e que uma das coordenadas a ou b também fosse $\neq 0$. Sem esta hipótese, o vetor u seria igual a $\pm e_1$, $\pm e_2$ ou $\pm e_3$. Neste caso, não haveria dificuldade em achar v e w mas a solução proposta não serviria.

15. Se $P = A + sv + tw$ então $\overrightarrow{AP} = sv + tw$, logo $\langle \overrightarrow{AP}, u\rangle = s\langle v, u\rangle + t\langle w, u\rangle = 0$. Reciprocamente, se $\langle \overrightarrow{AP}, u\rangle = 0$ então, tomando $B \neq A$ tal que $u = \overrightarrow{AB}$, vemos que AB e AP são segmentos perpendiculares, portanto P pertence ao plano Π que passa por A e é perpendicular a AB. (V. Exercício 8.) Como v e w são vetores não-colineares nesse plano, segue-se que $\overrightarrow{AP} = sv + tw$ para determinados números reais s, t. Assim, o conjunto dos pontos $A + sv + tw$ coincide com o plano que contém A e é perpendicular a AB.

16. Os pontos da semi-reta $\overrightarrow{NP}$ diferentes de N são da forma $P' = (tx, ty, 1 - t(1 - z))$. Para que P' esteja no ponto Π_{xy} , deve-se ter $1 - t(1 - z) = 0$, ou seja, $t = 1/(1-z)$, o que dá $P' = \big(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\big)$, portanto $x' = \frac{x}{1-z}$, $y' = \frac{y}{1-z}\cdot$ Em seguida, vamos obter a fórmula das coordenadas de P em função das de P'. Escrevamos $P' = (a, b, 0)$. Os pontos da semi-reta $\overrightarrow{NP'}$ são da forma $P = (ta, tb, 1 - t)$. A fim de que P pertença à esfera S, deve-se ter $t^2a^2 + t^2b^2 + (1-t)^2 = 1$. Desenvolvendo e simplificando, vem $(a^2 + b^2 + 1)t^2 - 2t = 0$. Como $P \neq N$, t é diferente de zero, portanto $t = 2/(a^2 + b^2 + 1)$. Assim, $P = \big(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\big)$.

17. Na equação do plano, podemos multiplicar todos os coeficientes por um fator constante. Se o plano não passa pela origem, sua equação pode, portanto, ser escrita sob a forma $mx + ny + pz = 1$. Impondo as condições de que as coordenadas dos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ satisfazem esta equação, obtemos sucessivamente $ma = 1$, $nb = 1$, $pc = 1$, logo $m = 1/a$, $n = 1/b$ e $p = 1/c$ e a equação procurada é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

18. A fim de que uma reta seja perpendicular a um plano, basta que ela seja ortogonal a dois segmentos de reta não paralelos contidos nesse plano. Seja $P = (x, y, z)$. Temos $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$ não-colineares. A fim de que $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ seja ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, deve ser $0 = \langle \overrightarrow{PP}, \overrightarrow{AB} \rangle = y + z$ e $0 = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AC} \rangle = -2x + y - z$. O sistema $y + z = 0$, $-2x + y - z = 0$ admite a solução geral $P = (x, x, -x)$. Em particular, $P = (1, 1, -1)$ responde ao que foi pedido. A equação do plano é, portanto $x + y - z = d$. Para determinar d, usa-se o fato de que $A = (1, 1, 2)$ pertence a esse plano, o que nos dá $d = 0$. Logo, a resposta é $x_y - z = 0$.

19. A equação procurada tem a forma $mx + ny + pz = q$. Como os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 2, 1)$ pertencem ao plano, suas coordenadas satisfazem a equação. Logo

$$m + n + 2p = q$$

$$m + 2n + 3p = q$$

$$-m + 2n + p = q.$$

Por escalonamento, este sistema é equivalente a

$$m + n + 2p = q$$
$$n + p = 0$$
$$0 = 2q.$$

Portanto $q = 0$ e a solução geral do sistema é $(m, m, -m)$. A equação procurada é $x + y - z = 0$.

20. Como as retas AB e CD são paralelas, o ponto D pertence ao plano determinado pelos pontos não-colineares A, B e C. Esse plano contém as duas retas dadas e pode ser determinado pelos processos apresentados nos exercícios 18 e 19.

21. O plano Π que se procura contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao segmento AP. Como $A = (a, b, c)$, a equação do plano Π é $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - z)(z - z_0) = 0$.

22. O segmento OA tem comprimento igual à distância de 0 ao plano Π, logo é perpendicular a esse plano. A equação de Π é, portanto, da forma $ax + by + cz = d$. Como $A \in \Pi$, temos $d = a^2 + b^2 + c^2$. Em suma: $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$ é a equação de Π.

23. Tome um sistema de coordenadas no qual se tenha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$ e $A' = (1, 1, 1)$.

a) Temos $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AA'} = (1, 1, 1)$. Portanto $\langle \overrightarrow{AA'}, BC\rangle = \langle \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BD}\rangle = 0$. Então AA' é ortogonal aos segmentos BC e BD do plano (BCD), logo é perpendicular a esse plano.

b) O baricentro do triângulo BCD é o ponto P, extremidade do vetor $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. (Lembre que A é a origem do sistema de coordenadas.) Em termos de coordenadas, temos $P = (1/3, 1/3, 1/3)$, logo $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Assim, P

pertence tanto ao plano (BCD) como ao segmento AA', logo é a interseção de (BCD) com AA'.

Nota: Acima, estamos admitindo a aresta do cubo como unidade de comprimento.

24. Tomemos o cubo de aresta 1, contendo os vértices $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $D = (0,1,0)$, $E = (0,0,1)$, $C = (1,1,0)$, $F = (1,0,1)$ e mais 3 que não vêm ao caso. Consideremos as diagonais CE e DF. Temos $\overrightarrow{CE} = (-1,-1,1)$ e $\overrightarrow{DF} = (1,-1,1)$, portanto $\langle \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF} \rangle = 1$ e $|\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{3}$. Se chamarmos de θ o ângulo entre esses dois vetores teremos $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF} = |\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{DF}| \cdot \cos\theta$ portanto $\cos\theta = 1/3$.

25. Os pontos procurados são $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ e $D = (1,1,1)$. Há 2 soluções possíveis.

26. Basta tomar os 6 pontos $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$ e $(0,0,\pm 1)$.

27. Tomamos um sistema de coordenadas no qual os vértices do octaedro sejam $A = (a,0,0)$, $A' = (-a,0,0)$, $B = (0,a,0)$, $B' = (0,-a,0)$, $C = (0,0,a)$ e $C' = (0,0,-a)$. Consideremos as faces opostas AC e $A'B'C'$. Seus baricentros são $P = (a/3, a/3, a/3)$ e $P' = (-a/3,-a/3,-a/3)$. Os vetores $\overrightarrow{AB} = (-a,a,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-a,0,a)$, ambos sobre a face ABC, são ortogonais a $\overrightarrow{OP}$. Como AB e AC são não-colineares, segue-se que o segmento OP é perpendicular à face ABC. Analogamente, a face $A'B'C'$ é perpendicular a OP', portanto a OP. Logo ABC e $A'B'C'$ são paralelas e a distância entre elas é o comprimento da perpendicular comum PP', logo essa distância é $2a/\sqrt{3}$.

28. O vetor $v = (1,2,-1)$ é ortogonal ao plano Π, dado pela equação $x+2y-z = 5$, logo a reta r, formada pelos pontos $A+tv$, $t \in \mathbb{R}$, é perpendicular a esse plano. A interseção de r com Π é o ponto $P = (3+t, 7+2t, -t) = A+tv$ cujas coordenadas satisfazem a equação de Π, ou seja, $3+t+2(7+2t)-(-t) = 5$, o que dá $t = -2$, portanto $P=(1,3,2)$. O simétrico do ponto A em relação ao plano Π é o ponto $A'=(x,y,z)$ tal que P é o ponto médio de AA'. Então deve ser $\dfrac{x+3}{2}=1$, $\dfrac{y+7}{2}=3$ e $\dfrac{z+0}{2}=2$, ou seja, $x=-1$, $y=-1$ e $z=4$. Assim, o simétrico de $A=(3,7,0)$ em relação ao plano $x+2y-z=5$ é o ponto $A'=(-1,-1,4)$.

29. Fixemos um ponto A na reta r; por exemplo, $A=(1,0,-1)$. Os pontos de r são da forma $A+tv$, com $v=(1,-1,2)$ e $t\in\mathbb{R}$. A projeção ortogonal de P sobre r é o ponto $Q\in r$ tal que PQ é perpendicular a r, ou seja $\langle\overrightarrow{PQ},v\rangle=0$. Ora, como $P=(1,2,5)$ e $Q=(t+1,-t,,2t-1)$, temos $\overrightarrow{PQ}=(t,-t-2,2t-6)$, logo $\langle\overrightarrow{PQ},v\rangle=t+t+2+4t-12$ e a condição $\langle\overrightarrow{PQ},v\rangle=0$ nos dá $t=5/3$, logo $Q=(8/3,-5/3,7/3)$.

30. Se $A=(2,1,2)$ então o vetor $\overrightarrow{OA}=(2,1,2)$ é ortogonal ao plano Π de equação $x+y+2z=12$ e a interseção P da reta OA com Π é o ponto de Π mais próximo de 0. Como $P\in OA$ suas coordenadas são $(2t,t,2t)$. E sendo $P\in\Pi$, deve-se ter $2(2t)+t+2(2t)=12$, o que dá $t=4/3$. Portanto o ponto do plano Π mais próximo de 0 é $P=(8/3,4/3,8/3)$.

31. a) Tome um sistema de coordenads cuja origem é o pé da altura da pirâmide, os eixos OX e OY são as diagonais da base e (conseqüentemente) o eixo OZ é a altura. As coordenadas dos vértices são, portanto: $A=3\sqrt{2},0,0)$, $B=(0,3\sqrt{2},0)$, $C=(-3\sqrt{2},0,0)$, $D=(0,-3\sqrt{2},0)$ e $E=(0,0,4)$.

b) Cada aresta lateral é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a altura da pirâmide (que mede 4) e a metade da diagonal da base (igual a $3\sqrt{2}$). Logo a aresta lateral vale $\sqrt{34}$.

c) Temos $\overrightarrow{AE}=(-3\sqrt{2},0,4)$ e $\overrightarrow{BC}=-3\sqrt{2},-3\sqrt{2},0)$, logo $\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC}\rangle=18$. Além disso, $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{34}$ e $|\overrightarrow{BC}|=6$. Portanto $18=\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AE}|\,|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta=6\cdot\sqrt{34}\cdot\cos\theta$ e daí $\cos\theta=3/\sqrt{34}$.

d) Por conveniência, escrevamos a equação do plano (EBC) sob a forma $ax + by + cz = 3\sqrt{2}$. Como os pontos $E = (0,0,4)$, $B = (0, 3\sqrt{2}, 0)$ e $C = (-3\sqrt{2}, 0, 0)$ pertencem a esse plano, concluímos que $a = -1$, $b = 1$ e $c = 3/(4\sqrt{2})$, logo a equação do plano (EBC) é $-x + y + \dfrac{3}{4\sqrt{2}} z = 3\sqrt{2}$. O plano (EBC) é paralelo à reta AD pois contém a reta BC, que é paralela a AD. Logo, a distância de qualquer ponto de AD ao plano (EBC) é a mesma. Tomemos o ponto $A = (3\sqrt{2}, 0, 0)$. Aplicando diretamente a fórmula da distância de um ponto a um plano, obtemos $d(A, (EBC)) = 24/5$.

32. Este exercício pertence ao Capítulo 4.

33. A equação $x+2y-3+k(3x-y-2) = 0$ representa um plano vertical contendo a reta $r_k \subset \Pi_{xy}$ que é dada pela mesma equação. Tomando $k = 0$ e $k = 2$, vemos que r_0 é a reta $x + 2y - 3$ e r_2 é a reta $x = 1$. Temos $r_0 \cap r_2 = \{(1,1)\}$ e é imediata que o ponto (1,1) está contido em todas as retas r_k. Logo todos os planos representados pela equação dada, para $k \in \mathbb{R}$ qualquer, contêm a reta vertical $x = y = 1$. A reta r_k, cuja equação em Π_{xy} é $x + 2y - 3 + k(3x - y - 2) = 0$, passa pelo ponto (1,1) e tem inclinação $(1 + 3k)/(k - 2)$. (Podemos supor sempre $k \neq 2$ pois já sabemos que r_2 é a reta $x = 1$.) Como se vê facilmente, a fração $(1+3k)/(k-2)$, quando k varia em $\mathbb{R} - \{2\}$, assume todos os valores reais salvo 3. Portanto, quando se atribui a k um valor real qualquer, a equação originalmente dada representa qualquer plano vertical que contenha a reta $x = y = 1$, exceto aquele que contém a reta horizontal dada por $3x - y = 2$, $z = 0$.

34. Para todo $k \in \mathbb{R}$, a equação $x - y + z - 1 + k(2x + y - 3z) = 0$ representa um plano Π_k, o qual (afirmamos) contém a reta r, de equações paramétricas $x = t$, $y = (5t - 3)/2$, $z = (3t - 1)/2$. Com efeito, as equações dos planos Π_1 e $\Pi_{1/3}$ são $3x - 2z = 1$ e $5x - 2y = 3$, respectivamente. O sistema formado por estas duas equações tem a solução geral $y = (5x - 3)/2$, $z = (3x - 1)/2$. Tomando

$x = t$ como parâmetro obtemos a reta r, portanto r é a interseção de Π_1 com $\Pi_{1/3}$. Uma substituição direta mostra que r está contida em todos os planos Π_k, $k \in \mathbb{R}$. Mostraremos agora que, reciprocamente, todo plano Π, de equação $ax+by+cz=d$, que contenha a reta r, é da forma $\Pi = \Pi_k$ para algum k, desde que Π não seja o plano Π' de equação $2x+y-3z=0$. Com efeito, como $r \subset \Pi$, o vetor $w=(a,b,c)$ é ortogonal a r. Também são ortogonais a r os vetores $u=(1,-1,1)$ e $v=(2,1,-3)$ pois os planos Π_0, de equação $x-y+z=1$, e Π', de equação $2x+y-3z=0$, contêm a reta r. Segue-se que w, u e v são coplanares e (como u e v não são colineares) tem-se então $w = \alpha u + \beta v$. Se for $\alpha \neq 0$ poderemos escrever $\frac{1}{\alpha} \cdot w = u + kv$, com $k = \beta/\alpha$ e então o plano Π, cuja equação pode também ser escrita na forma $\frac{a}{\alpha}x + \frac{b}{\alpha}y + \frac{c}{\alpha}z = \frac{d}{\alpha}$, será igual a Π_k, com $k = \beta/\alpha$. Ora, $\alpha \neq 0$ significa que o plano Π não coincide com Π'. Isto completa a solução.

35. Lembremos que dois ou mais vetores se dizem linearmente dependentes quando um deles é combinação linear dos demais. No plano Π que contém os 4 pontos dados, tomemos um sistema de coordenadas no qual $A=(0,0)$. Então as coordenadas dos vetores $u=(b,b')$, $v=(c,c')$ e $w=(d,d')$ são as mesmas dos pontos B, C e D, nesta ordem. Se os 4 pontos forem colineares, os vetores u, v e w serão múltiplos uns dos outros, logo linearmente dependentes. Caso contrário, pelo menos dois desses vetores, digamos u e v, serão não-colineares, o que significa que $bc'-cb' \neq 0$. Então o sistema formado pelas equações $bx+cy=d$, $b'x+c'y=d'$ possui uma solução (x,y), e isto quer dizer que $w = xu+yv$, ou seja, os vetores u, v e w são linearmente dependentes.

Em seguida, consideremos 4 vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 no espaço tridimensional. Se três deles, digamos v_1, v_2, v_3, são coplanares então, como vimos acima, um é combinação linear dos outros dois, por exemplo, $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Então $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 \cdot v_4$ e os 4 vetores dados são linearmente dependentes. Caso contrário, podemos tomar no espaço um sistema de coordenadas no qual $v_1 = (a_1, 0, 0)$, $v_2 = (a_2, b_2, 0)$ e $v_3 = (a_3, b_3, c_3)$, com $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$. Seja $v_4 = (d_1, d_2, d_3)$. Podemos resolver (de cima para baixo) o sistema de equações

$$\begin{aligned} a_1 x \qquad\qquad &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y \qquad &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \,, \end{aligned}$$

obtendo assim números x, y, z tais que $v_4 = xv_1 + yv_2 + zv_3$, logo os vetores dados são linearmente dependentes.

36. Fixado um sistema de coordenadas, consideremos o cubo cujos vértices são $A_1 = (0, 0, 0)$, $B_1 = (1, 0, 0)$, $C_1 = (1, 1, 0)$, $D_1 = (0, 1, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1)$, $B_2 = (1, 0, 1)$, $C_2 = (1, 1, 1)$ e $D_2 = (0, 1, 1)$. Então B_1, D_1, C_2, A_2 são os vértices de um tetraedro regular. Duas arestas opostas deste tetraedro, como B_1D_1 e A_2C_2, por exemplo, são ortogonais porque são diagonais "diferentes" em faces paralelas do cubo. Mais precisamente, $\overrightarrow{B_1D_1} = (-a, a, 0)$ e $\overrightarrow{A_2C_2} = (a, a, 0)$, logo $\langle \overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{A_2C_2} \rangle = 0$.

37. Nos 4 pontos de tangência, os raios da esfera inscrita no tetraedro são ortogonais às suas faces, três das quais estão contidas nos planos coordenados e a quarta, contendo os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$, é parte do plano $6x + 3y + 2z = 6$. Como esses raios têm o mesmo comprimento x, o centro da esfera é o ponto $P = (x, x, x)$, cuja distância ao plano $6x + 3y + 2z = 6$ é igual a x. Pela fórmula da distância de um ponto a um plano, temos $\dfrac{|6x + 3x + 2x - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = x$, ou $11x - 6 = 7x$, o que nos dá $x = 2/3$. Esta é a medida do raio da esfera.

38. Tem-se um ponto O e um plano Π tais que, para quaisquer $P, Q \in \Pi$, se $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ então $R \in \Pi$. Se O não pertencesse a Π, seu simétrico O^* em relação a esse plano também não pertenceria. Seja $O' = OO^* \cap \Pi$ o pé da perpendicular baixada de O sobre Π. Tomando em Π dois pontos P e Q tais que O' seja o ponto médio de PQ, teríamos $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO^*}$. Como $O^* \notin \Pi$ chegaríamos a uma contradição. Logo $O \in \Pi$.

39. Como o plano dado não contém a origem, sua equação pode ser escrita sob a forma $mx+ny+pz=1$. Levando em conta que os pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$ pertencem ao plano, temos $ma=1$, $nb=1$ e $pc=1$, donde $m=1/a$, $n=1/b$ e $p=1/c$, logo a equação procurada é $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

40. Considere dois pontos distintos A, B em X. Então a reta AB está contida em X. Se X possuir algum ponto C fora de AB, seja Π o plano (ABC). Dado qualquer ponto $P \in \Pi$, se a reta CP não for paralela a AB então $P \in X$ pois, neste caso, CP contém C e o ponto $CP \cap AB$, logo $CP \subset X$. Assim, X contém todos os pontos do plano Π salvo eventualmente aqueles que estão na reta r que passa por C e é paralela a AB. Mas se Q é um ponto de r então, tomando pontos M e N em lados opostos de r, no plano Π, de modo que $Q \in MN$, concluímos que $Q \in X$. Assim, X contém o plano Π. Se, além disso, X contiver algum ponto D fora do plano Π, um raciocínio inteiramente análogo ao anterior mostra que X contém todos os pontos do espaço.