Soluções dos Exercícios da Seção 4.1

1) A primeira pergunta pode ser respondida de 5 modos; a segunda, de 5 modos, etc.

A resposta é $5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^{10} = 9.765.625$.

2) Para formar um subconjunto, deve-se decidir, para cada elemento do conjunto, se ele pertencerá ou não ao subconjunto. Há 2 modos de decidir o que fazer com o primeiro elemento do conjunto, 2 modos com o segundo, etc.

A resposta é $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$.

Outra solução:

Quando se acrescenta um elemento a um conjunto, os subconjuntos do novo conjunto são os subconjuntos do conjunto original e estes unidos ao novo elemento. Ou seja, o número de subconjuntos dobra. Então, se A_n é o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos, (A_n) é uma progressão geométrica de razão 2. Logo, $A_n = A_0.2^n = 2^n$ pois o conjunto vazio possui um único subconjunto.

3) A primeira pessoa tem 5 escolhas; a segunda, 4; a terceira, 3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

4) Os bancos em que os homens se sentam podem ser escolhidos de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modos, o mesmo ocorrendo com os bancos das mulheres. Em cada banco, os casais podem se sentar de 2 modos diferentes. A resposta é $120^2 \times 2^5 = 460.800$.

5) As 64 casas do tabuleiro dividem-se, naturalmente, em três grupos:

i) as 4 casas dos vértices;

ii) as 24 casas da borda do tabuleiro, mas que não são vértices;

iii) as restantes 36 casas, que são interiores ao tabuleiro.

Vamos separar a nossa contagem conforme o tipo de casa ocupada pelo rei negro:

i) há 4 possibilidades para o rei negro e 60 para o rei branco;

ii) há 24 possibilidades para o rei negro e 58 para o rei branco;

iii) há 36 possibilidades para o rei negro e 55 para o rei branco.

A resposta é $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$.

Se os reis são iguais, a resposta passa a ser a metade da resposta anterior, pois, trocando a posição dos reis, agora obtém-se a mesma configuração.

6) Haverá uma torre em cada linha e em cada coluna. A posição da torre da primeira linha pode ser escolhida de 8 modos; a da segunda linha, de 7, etc.

A resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$.

Se as torres fossem diferentes, para cada uma das escolhas de posição, teríamos que escolher uma das torres. A resposta seria, portanto,

$8 \times 8 \times 7 \times 7 \times 6 \times 6 \times 5 \times 5 \times 4 \times \times 3 \times \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = (8!)^2 = 1.625.702.400$.

7) Se a primeira carta é o rei de copas, a segunda pode ser escolhida de 48 modos (pode ser qualquer carta, exceto os 4 reis). Se a primeira carta é de copas mas não é o rei, ela pode ser escolhida de 12 modos. Neste caso, a segunda carta pode ser escolhida de 47 modos (não pode ser a primeira escolhida, nem nenhum dos 4 reis). A resposta é $48 + 12 \times 47 = 612$.

8) a) Para construir uma função, devemos, para cada elemento de A, escolher sua imagem em B. Há 7 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de A, 7 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

A resposta é $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2.401$.

b) Para a função ser injetora, elementos diferentes devem ter imagens diferentes. Há 7 modos de escolher a imagem do primeiro elemento de A, 6 modos de escolher a imagem do segundo elemento, etc.

A resposta é $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

9) a) Como $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, 720 possui $5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores. Aos pares, estes divisores formam produtos iguais a 720. Logo, há 15 modos de escrever 720 como um produto de divisores.

b) Como $144 = 2^4 \times 3^2$, 144 possui $3 \times 3 = 9$ divisores. Com eles, podem ser formados 4 pares de divisores cujo produto é 144 e, além

disso, pode ser formado o produto 12×12. Assim, há 5 modos de escrever 144 como um produto de divisores.

10) Um armário ficará aberto se ele for mexido um número ímpar de vezes. Por outro lado, o armário de ordem k é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de k. Logo, estarão abertos os armários cujos números possuem um número ímpar de divisores. Isto ocorre com os números cujos expoentes são todos pares na decomposição em fatores primos, ou seja, são quadrados perfeitos. Assim, permanecerão abertos os armários cujos números são quadrados perfeitos, ou seja, os de números $1^2, 2^2, \ldots, 30^2$.

11) Separemos o caso em que o primeiro e o terceiro quadrantes têm cores iguais do caso em que eles têm cores diferentes.

No caso de cores iguais, há 5 modos de escolher a cor única para o primeiro e o terceiro quadrantes, 4 modos de escolher a cor para o segundo quadrante e 4 modos de escolher a cor para o quarto quadrante. Há, portanto, $5 \times 4 \times 4 = 80$ modos de colorir o mapa usando cores iguais no primeiro e no terceiro quadrantes.

No caso de cores diferentes, há 5 modos de escolher a cor para o primeiro quadrante, 4 modos de escolher a cor para o terceiro quadrante, 3 modos de escolher a cor para o segundo quadrante e 3 modos de escolher a cor para o quarto quadrante. Há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ modos de colorir o mapa usando cores iguais no primeiro e no terceiro quadrantes.

No total, temos, portanto, $80 + 180 = 260$ modos de colorir a figura.

12) a) Há $26^5 = 11.881.376$ palavras de 5 letras. Delas, devemos subtrair as palavras que começam por A, $1 \times 26^4 = 456.976$, e aquelas nas quais a letra A não figura, $25^5 = 9.765.625$.

A resposta é $11.881.376 - 456.976 - 9.765.625 = 1.658.775$.

b) O número total de palavras de 5 letras distintas é $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7.893.600$. Delas devemos subtrair as palavras que começam por A, $1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303.600$ e aquelas nas quais a letra A não figura, $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6.375.600$.

A resposta é $7.893.600 - 303.600 - 6.375.600 = 1.214.400$.

Outra solução:

Há 4 posições para colocar a letra A; depois disso, as quatro casas vazias podem ser preenchidas de 25, 24, 23 e 22 modos.

A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1.214.400$.

13) Cada letra pode ser escolhida de 26 modos, enquanto cada algarismo pode ser escolhido de 10 modos. Logo, o número total de placas é $26^3 \times 10^4 = 175.760.000$.

14) O número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de frente é $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$; o número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de costas é $5 \times 4 \times 3 = 60$; o número de modos de acomodar os demais passageiros é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43.200$.

15) Vamos primeiramente determinar quantos zeros são escritos na casa das unidades, depois na das dezenas, etc.

Há 222 números que têm 0 como algarismo das unidades, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 222 (inclusive).

Há $22 \times 10 = 220$ números que têm 0 como algarismo das dezenas, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 22 (inclusive) e depois do zero, os inteiros de 0 (inclusive) a 9 (inclusive).

Há $2 \times 100 = 200$ números que têm 0 como algarismo das centenas, pois antes do zero podem ser colocados os inteiros de 1 (inclusive) a 2 (inclusive) e depois do zero, os inteiros de 0 (inclusive) a 99 (inclusive).

A resposta é $222 + 220 + 200 = 642$.

16) É mais simples contar, primeiramente, os números onde o algarismo 5 não aparece. O primeiro dígito pode ser escolhido de 8 modos (não pode ser igual a 0 nem igual a 5) e cada um dos demais três dígitos pode ser selecionado de 9 modos (deve ser diferente de 5). Logo, há $8 \times 9^3 = 5.832$ números de 4 algarismos em que não aparece o algarismo 5.

A quantidade de números de 4 dígitos, com ou sem o dígito 5, é $9 \times 10^3 = 9.000$ (pois há 9 modos de selecionar o primeiro dígito, que deve ser diferente de 0, e 10 modos de selecionar cada um dos demais 4 dígitos). Logo, há $9.000 - 5.832 = 3.168$ números de 4 algarismos em que o 5 não aparece.

17) Devemos decidir quantos exemplares de cada revista devem ser postos na coleção. Há 6 possibilidades para a "Veja" (0, 1, 2, 3, 4, ou 5 exemplares), 7 para a "Manchete" e 5 para a "Isto É". O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$, e o número de coleções não-vazias é 209.

18) Em cada dia, duas das matérias são ensinadas e uma folga. Há 3 possibilidades para escolher a matéria que folga na segunda, 2 para escolher a que folga na quarta e 1 para escolher a que folga na sexta. Portanto, há 6 modos para escolher as matérias de cada dia. Para escolher os horários, há 2 possibilidades em cada dia. Logo, o número total de horários é $6 \times 8 = 48$.

19) Foi feita uma distinção artificial ao se considerar cada casal ordenado de dois modos diferentes: começando pela mulher ou pelo homem. Por esta razão, o resultado encontrado foi igual ao dobro do correto.

20) Há três tipos de cartões: os que virados de cabeça para baixo não representam números, como, por exemplo, 41.809; os que virados de cabeça para baixo representam o mesmo número, como, por exemplo, 86.198; os que virados de cabeça para baixo representam números diferentes, como, por exemplo, 66.810. Os cartões do último tipo são os que permitem economia porque um mesmo cartão serve para representar dois números. Há $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3.125$ cartões que virados de cabeça para baixo representam números, iguais ou diferentes, pois tais cartões devem ter como algarismos apenas 0, 1, 8, 6 ou 9. Destes, $5 \times 5 \times 3 = 75$ são do segundo tipo, pois um tal cartão deve ter as casas das extremidades preenchidas por 00, 11, 88, 69 ou 96, a segunda e a quarta casas preenchidas por 00, 11, 88, 69 ou 96, e a casa central preenchida por 0, 1 ou 8. Portanto, os cartões do terceiro tipo são em número de $3.125 - 75 = 3.050$. Podem ser economizados $3.050/2 = 1.525$ cartões. O número mínimo de cartões de que se necessita é $100.000 - 1.525 = 98.475$.

21) A decomposição de 360 em fatores primos é $720 = 2^3.3^2.5$. Os divisores inteiros e positivos de 720 são os números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. A soma dos divisores é $S = \Sigma 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. Para calcular essa soma, dividimos as parcelas em dois grupos, conforme seja $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$. $S = \Sigma\left(2^\alpha.3^\beta.5^0\right) + \Sigma\left(2^\alpha.3^\beta.5^1\right) = 6\,\Sigma\left(2^\alpha.3^\beta\right)$ porque a segunda

soma é igual ao quíntuplo da primeira. Agora, dividimos as parcelas em grupos, conforme seja $\beta = 0$, $\beta = 1$ ou $\beta = 2$. $S = 6\,[\Sigma\,(2^{\alpha}.3^{0}) + \Sigma\,(2^{\alpha}.3^{1}) + \Sigma\,(2^{\alpha}.3^{2})] = 6[\Sigma\,2^{\alpha} + 3\Sigma\,2^{\alpha} + 9\Sigma\,2^{\alpha}] = 6[13\Sigma\,2^{\alpha}] = 78\Sigma 2^{\alpha} = 78[2^{0} + 2^{1} + 2^{2} + 2^{3}] = 78 \times 15 = 1.170$.

Soluções dos Exercícios da Seção 4.2

1) a) O número total de anagramas é $8! = 40.320$.

b) Há 4 modos de escolher a vogal que será a primeira letra do anagrama e 3 modos de selecionar a vogal que será a última letra do anagrama. Depois disso, há 6! modos de arrumar as demais letras entre a primeira e a última.

A resposta é $4 \times 3 \times 6! = 4 \times 3 \times 720 = 8.640$.

c) As vogais e consoantes podem aparecer na ordem CV CV CV CV ou na ordem VC VC VC VC. No primeiro caso, devemos colocar as 4 vogais nos 4 lugares de ordem par (4! modos) e as 4 consoantes nos 4 lugares de ordem ímpar (4! modos).

Há $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ anagramas do primeiro tipo. Analogamente, há 576 anagramas do segundo tipo.

A resposta é $576 + 576 = 1.152$.

d) Tudo se passa como se CAP fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 6 objetos: CAP,I,T,U,L,O.

A resposta é $6! = 720$.

e) Primeiramente, devemos escolher a ordem em que as letras C, A, P aparecerão. Há 3! modos. Depois, devemos arrumar em fila 6 objetos: o bloco das letras C, A, P e as 5 letras I, T, U, L, O. Há 6! modos.

A resposta é $3! \times 6! = 6 \times 720 = 4320$.

f) Basta arrumar em fila, depois do PA, as restantes 6 letras.

A resposta é $6! = 720$.

g) Há 7! anagramas com a letra P em primeiro lugar e há 7! anagramas com a letra A em segundo lugar. Há também 6! anagramas com P em primeiro lugar e A em segundo lugar. Ao somarmos 7! com 7!,

encontramos o número de anagramas com P em primeiro lugar ou A em segundo lugar, mas contamos duas vezes os anagramas que têm P em primeiro lugar e A em segundo lugar. A resposta é $7! + 7! - 6! = 5040 + 5040 - 720 = 9.360$.

h) Há 7! anagramas com a letra P em primeiro lugar, 7! anagramas com a letra A em segundo e 7! anagramas com a letra C em terceiro. Há também 6! anagramas com P em primeiro lugar e A em segundo lugar, 6! anagramas com P em primeiro e C em terceiro e 6! anagramas com A em segundo e C em terceiro. Finalmente, há 5! anagramas com P em primeiro lugar, A em segundo e C em terceiro.

Ao somarmos 7! com 7! com 7!, encontramos o número de anagramas que têm P em primeiro lugar ou A em segundo ou C em terceiro, mas contamos alguns anagramas várias vezes.

Contamos duas vezes os anagramas que têm P em primeiro lugar e A em segundo; o mesmo se deu com os que têm P em primeiro e C em terceiro e com os que têm A em segundo e C em terceiro. Descontando essas contagens indevidas, chegamos a $7! + 7! + 7! - 6! - 6! - 6! = 3.7! - 3.6!$.

Entretanto, anagramas com P em primeiro lugar e A em segundo e C em terceiro foram, inicialmente, contados três vezes e, posteriormente, descontados três vezes, o que significa que não estão sendo contados. Incluindo-os na contagem, obtemos a resposta correta, que é $3.(7!) - 3.(6!) + 5! = 3.(5.040) - 3.(720) + 120 = 13.080$.

i) Como há 6 ordens possíveis para as letras C, A e P, os anagramas pedidos são exatamente 1/6 do total, ou seja, $8!/6 = 6.720$.

Outra solução:

Basta escolher as 3 posições a serem ocupadas pelas Letras P, A, C, o que pode ser feito de $C_8^3 = 56$ modos e distribuir as 5 letras restantes nas demais posições, o que pode ser feito de $5! = 120$ modos. O total de anagramas é $56 \times 120 = 6.720$.

2) O valor de $f(a_1)$ pode ser escolhido de n modos; o valor de $f(a_2)$, de $n - 1$ modos; ...; o de $f(a_n)$, de 1 modo.

A resposta é $n(n-1)\ldots 1 = n!$

3) O número total de modos de sentar 8 pessoas em 8 cadeiras é o número de modos de arrumar 8 pessoas em fila, 8!. O número de modos de

arrumar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, fiquem juntas é 2.7!, pois, para formar uma tal fila, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão Vera e Paulo e, em seguida, formar uma fila de 7 objetos: o bloco formado por Vera e Paulo; as demais 6 pessoas.

A resposta é 8! - 2.7! = 40.320 - 10.080 = 30.240.

4) Como visto no problema anterior, o número de filas nas quais duas pessoas (neste caso Helena e Pedro) ficam juntas é 2.7! = 10.080. O número de filas onde Helena e Pedro e também Vera e Paulo ficam juntos é obtido de modo análogo: agora são dois blocos de duas pessoas, cada um podendo ser arrumado de dois modos distintos e mais 4 pessoas. Portanto, o número de tais filas é 2.2.6! = 2.880. Logo, o número de filas em que Helena e Pedro ficam juntos, mas Vera e Paulo não, é $10.080 - 2.880 = 7.200$.

5) O elemento da permutação que ocupa o 10º lugar deve ser maior que 7. Pode ser escolhido de 3 modos. O elemento da 9ª posição deve ser maior que 6; haveria 4 possibilidades, mas uma delas já foi usada na escolha do elemento que ocupa a 10ª posição. Pode ser escolhido de 3 modos. Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que a cada nova casa abranda-se a restrição, criando uma possibilidade a mais, mas ao mesmo tempo diminui-se uma possibilidade, pois uma delas foi usada na etapa. Ou seja, há 3 possibilidades para cada casa até a 3ª casa. O elemento da 3ª posição deve ser maior que $3 - 3 = 0$; haveria 10 possibilidades, mas 7 delas já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de $10 - 7 = 3$ modos. O elemento da 2ª posição deve ser maior que $2 - 3 = -1$; haveria 10 possibilidades, mas 8 delas já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de $10 - 8 = 2$ modos. Finalmente, o elemento de posição 1 deve ser maior que $1 - 3 = -2$; haveria 10 possibilidades, mas 9 delas já foram usadas nas etapas anteriores. Pode ser escolhido de $10 - 9 = 1$ modo. A resposta é $3^8.2.1 = 13.122$.

6) Há C_{15}^5 modos de formar o Esporte; depois disso, C_{10}^5 modos de formar o Tupi; finalmente, 1 único modo de formar o Minas.

A resposta é $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times 1 = 756.756$.

7) O número de possibilidades é igual ao número obtido no problema

anterior dividido por $3! = 6$, já que permutando os nomes dos times a subdivisão continua a mesma. A resposta é $756.756/6 = 126.126$.

8) Escolha, sucessivamente, 3 pessoas para formar os 4 grupos de 3; isto pode ser feito, sucessivamente, de C_{20}^3 , C_{17}^3, C_{14}^3 e C_{11}^3 modos. A seguir, com as 8 pessoas restantes forme os 2 grupos restantes, o que pode ser feito de C_8^4 e C_4^4 modos, respectivamente. Fazendo isso, contamos cada divisão $4!.2!$ vezes, porque, quando formamos os mesmos grupos de 3 e os mesmos grupos 4 em outra ordem, contamos como se fosse outra divisão em grupos.

A resposta é $\dfrac{C_{20}^3.C_{17}^3.C_{14}^3C_{11}^3.C_8^4.C_4^4}{4!.3!} = \dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!} =$

$= 67.897.830.000$.

Outra solução:

Forme uma fila com as 20 pessoas. Isso automaticamente as divide em 4 grupos de 3 e 2 grupo de 4: as 3 primeiras formam um grupo, as 3 seguintes formam outro, etc.. Há $20!$ modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos corresponde a várias filas diferentes, o que faz com que, no resultado $20!$, cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividindo o resultado pelo número de vezes que cada divisão foi contada. Trocando a ordem dos elementos em cada grupo, o que pode ser feito de $3!.3!.3!.3!.4!.4!$ modos, ou a ordem dos grupos, o que pode ser feito de $4!.2!$ modos, a divisão em grupos não se altera, mas a fila sim. Cada divisão foi, assim, contada $(6!)^3.2!.3!$ vezes e a resposta é $\dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!}$.

9) Os adversários em cada jogo podem ser escolhidos, sucessivamente, de C_{12}^2, C_{10}^2, C_8^2, C_6^2, C_4^2 e C_2^2 modos. No entanto, assim contamos cada possível rodada $6!$ vezes, já que contamos diferentes ordens dos jogos como se fossem rodadas diferentes. A resposta é $\dfrac{C_{12}^2.C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{6!} =$

$\dfrac{12!}{2^6.6!} = 10.395$

Outra solução:

Colocando os 12 times em fila automaticamente formamos os 6 jogos da rodada. No entanto, a mesma rodada é contada várias vezes; os

adversários em cada jogo podem ser ordenados de 2 modos, enquanto os jogos podem ser ordenados de 6! modos. A resposta é, portanto, $\frac{12!}{2^6.6!}$.

10) a) Para determinar o lugar ocupado pelo número 62.417, devemos contar quantos números estão antes dele. Antes dele est˜

a 480 dezenas de milhar, ou seja, 4.800.000. A resposta é 480 + 4.800 + 48.000 + 480.000 + 4.800.000 = 5.333.280.

Outra solução:

Há 5! = 120 parcelas na soma. Podemos agrupá-las em 60 pares, juntando a cada número o que dele se obtém trocando o 1 com o 7, trocando o 2 com o 6, e conservando a posição do 4. Em cada par, a soma vale 88.888.

A resposta é $88.888 \times 60 = 5.333.280$.

11) Devemos inicialmente escolher a ordem em que as moças ficarão juntas, o que pode ser feito de $m!$ maneiras. Em seguida, devemos arrumar em fila $r+1$ objetos, os r rapazes e o bloco das moças, o que pode ser feito de $(r+1)!$ modos.

A resposta é $m!.(r+1)!$.

12) a) A face a receber o número 1 pode ser escolhida de 6 modos, a do número 2 de 5 modos, e assim por diante. O número de possibilidades é $6.5.4.3.2.1 = 720$.

b) Inicialmente, fazemos de conta que as faces tem cores diferentes. Contamos, pelo problema anterior, 720 dados. Como as faces são indistinguíveis, o mesmo dado foi contado várias vezes. Por exemplo, pense em um dado que tenha o 6 na face de baixo (face preta) e o 1 na face de cima (face branca). Ele é, certamente, diferente de um dado que tenha o 1 na face de baixo (face preta) e o 6 na face de cima (face branca). Mas sendo as faces indistinguíveis, o dado que tem o 6 na face de baixo e o 1 na face de cima é igual ao dado que tem o 1 na face de baixo e o 6 na face de cima; este é, simplesmente, aquele de cabeça para baixo. Esse mesmo dado aparece outra vez com o 1 na face da frente e o 6 na face de trás, com o 1 na face da esquerda e o 6 na face da direita, etc. Em suma, o mesmo dado foi contado tantas vezes quantas são as posições de colocá-lo.

O número de posições de colocar um cubo é $6 \times 4 = 24$, pois há 6 modos de escolher a face de baixo e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{720}{24} = 30$.

Outra solução:

Todo dado pode ser imaginado com a face 1 em baixo. Realmente, se o 1 não estiver em baixo, é possível rodar o dado de modo que o 1 vá para baixo. Fixado o 1 em baixo, devemos escolher quem ocupará a face oposta à face do 1. Isso pode ser feito de 5 modos. Digamos que tenha sido escolhido o 6. Com o 1 fixo em baixo e o 6 fixo em cima, devemos colocar os números 2, 3, 4 e 5 nas faces laterais. O 2 sempre pode ser imaginado na face da frente. Com efeito, se o 2 não estiver na face da frente, uma conveniente rotação colocá-lo-á na face da frente, sem tirar o 1 da face de baixo nem o 6 da face de cima. Fixados o 2 na frente, o 1 em baixo e o 6 em cima, devemos escolher quem ocupará a face oposta à face do 2. Isso pode ser feito de 3 modos. Digamos que tenha sido escolhido o 4. Agora, devemos colocar o 3 e o 5 nas faces da direita e da esquerda. Note que qualquer movimento com o dado ou retirará o 1 de baixo, ou o 6 de cima, ou o 2 da frente, ou o 4 de trás. Portanto, há 2 modos de preencher as faces direita e esquerda com os números 3 e 5.

A resposta é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

c) Um dado com faces de cores diferentes pode, agora, ser numerado de apenas $6.4.2 = 48$ modos, já que temos 6 faces a escolher para o número 1 (isto determina a face do número 6), 4 para o número 2 (o que determina a face do 5) e 2 para o número 3 (que determina a do 4). Mas como as faces são iguais, cada dado é contado, como no item anterior, 24 vezes. Logo há apenas $48/24 = 2$ dados distintos.

Outra Solução:

Como antes, podemos fixar o dado com o número 1 em baixo. Agora, no entanto, isto também fixa o número 6 na face de cima. Agora, o número 2 pode ser fixado na face da frente (e, portanto, o número 5 na de trás). Assim, tudo que temos a escolher é se a face lateral da direita é o 3 ou o 4. Temos, portanto, apenas duas possibilidades.

13) a) O número de posições para um tetraedro regular é $4 \times 3 = 12$, pois há 4 modos de escolher a face de apoio e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{4!}{12} = 2$.

b) O número de posições para um octaedro regular é $6 \times 4 = 24$, pois há 6 modos de escolher o vértice de apoio e 4 de escolher, dentre as arestas que incidem nesse vértice, a que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{8!}{24} = 1.680$.

c) O número de posições para um dodecaedro regular é $12 \times 5 = 60$, pois há 12 modos de escolher a face de apoio e 5 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{12!}{60} = 7.983.360$.

d) O número de posições para um icosaedro regular é $20 \times 3 = 60$, pois há 20 modos de escolher a face de apoio e 3 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente.

A resposta é $\dfrac{20!}{60} = 40.548.366.802.944.000 \cong 4.10^{16}$.

14) Temos $1! = 1$, que é um quadrado perfeito, $1! + 2! = 1 + 2 = 3$, que não é quadrado perfeito, $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$, que novamente é um quadrado perfeito, $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, que não é quadrado perfeito. Todos os fatoriais seguinte, a partir de $5!$ terminam com zero, já que são múltiplos de 5 e 2. Logo, todas as somas da forma $\sum_1^n k!$ para $n \geq 5$ terminam com o algarismo 3 e não são, portanto, quadrados perfeitos. As únicas soluções são $n = 1$ e $n = 3$.

15) Em ESTRELADA as letras A e E aparecem 2 vezes cada e as letras S, T, R, L e D aparecem 1 vez cada uma, havendo, portanto, 9 letras na palavra.

Para formar um anagrama, devemos escolher 2 das 9 posições para colocar as letras A, o que pode ser feito de C_9^2 modos, 2 das 7 posições restantes para colocar as letras E, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e arrumar as letras S, T, R, L e D nas 5 posições restantes, o que pode ser feito de $5!$ modos. A resposta é $C_9^2.C_7^2.5! = 90.720$.

Outra solução:

O número de anagramas é $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \dfrac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90.720$.

16) Formar um subconjunto com p elementos significa escolher p dos n elementos. A resposta é C_n^p.

17) Basta escolher as provas do primeiro dia, o que pode ser feito de $C_8^4 = 70$ modos.

18) O processo de contagem apresentado conta determinadas comissões mais de uma vez. Isto ocorre porque um homem que participe da comissão pode ser inserido de dois modos diferentes: como um dos 3 homens escolhidos inicialmente, ou como uma das duas pessoas escolhidas posteriormente. O pior é que não é possível "corrigir" a contagem dividindo pelo número de vezes que cada comissão é contada: as comissões com 3 homens são contadas apenas uma vez, as que têm 4 homens s˜

do poliedro, 12 dos quais são arestas e $6\dfrac{4(4-3)}{2} = 12$ dos quais são diagonais de faces. A resposta é $28 - 12 - 12 = 4$.

Outra solução:

Cada diagonal de um prisma n-agonal une um vértice da base "de cima" a um vértice da base "de baixo". O vértice da base "de cima" pode ser selecionado de n modos; depois disso, o da base "de baixo" pode ser selecionado de $n-3$ modos, pois um dos vértices da base "de baixo", se selecionado, daria origem a uma aresta e os dois vértices a ele adjacentes nesta base dariam origem a diagonais de faces laterais. O número de diagonais de um prisma n-agonal é, portanto, $n(n-3)$.

Como o cubo é um prisma quadrangular,

a resposta é $4(4-3) = 4$.

e) O prisma hexagonal é um poliedro formado por 6 faces quadrangulares e 2 faces hexagonais e que tem 12 vértices e 18 arestas. Há $C_{12}^2 = 66$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 18 dos quais são arestas e $6\dfrac{4(4-3)}{2} + 2\dfrac{6(6-3)}{2} = 30$ dos quais são diagonais de faces.

A resposta é $66 - 18 - 30 = 18$.

Outra solução:

O número de diagonais de um prisma n-agonal é, como visto em d), $n(n-3)$. Portanto, o número de diagonais de um prisma hexagonal é $6(6-3) = 18$.

20) Uma função estritamente crescente é necessariamente injetiva (se $f(a) = f(b)$, não pode ser $a < b$, pois, neste caso, $f(a) < f(b)$, o que é absurdo; do mesmo modo, não pode ser $a > b$, pois, neste caso, $f(a) > f(b)$, o que é absurdo; logo, $a = b$). Logo, seu conjunto de valores terá exatamente m elementos. Para construir uma tal função, devemos, inicialmente, selecionar o conjunto de valores, o que pode ser feito de C_n^m modos.

Selecionado o conjunto de valores, a função está determinada porque $f(1)$ deve ser igual ao menor elemento do conjunto de valores, $f(2)$ deve ser igual ao segundo menor elemento do conjunto de valores, etc.

A resposta é, portanto, C_n^m.

21) Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

A "resposta" seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 \times 6 \times 64 = 13.440$.

Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_6^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 4; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os dígitos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados por 0.

A resposta é $13.440 - 480 = 12.960$.

Outra solução:

Vamos contar separadamente:

i) números que começam em 4; ii) números que começam em 8; iii) números que não começam nem em 4 nem em 8.

i) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há C_6^2 modos de escolher as outras duas casas do número que também serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

   Há $1 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 1 \times 15 \times 6 \times 64 = 5.760$ números do tipo i).

ii) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há 6 modos de escolher a outra casa do número que também será preenchida com o algarismo 8; depois disso, há C_5^3 modos de escolher as três casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

   Há $1 \times 6 \times C_5^3 \times 8 \times 8 = 6 \times 10 \times 64 = 3840$ números do tipo ii).

iii) Há 7 modos de preencher a primeira casa (não podemos usar nem 4, nem 8, nem 0); depois disso, há C_6^3 modos de escolher as três casas do número que serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8).

Há $7 \times C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 7 \times 20 \times 3 \times 8 = 3.360$ números do tipo iii).

A resposta é $5.760 + 3.840 + 3.360 = 12.960$.

22) a) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-1$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^{p-1}.

b) Para formar o subconjunto devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^{p}.

Outra solução:

Há C_n^p p-subconjuntos e o elemento a_1 figura em C_{n-1}^{p-1} deles. Logo, há $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$ subconjuntos nos quais o elemento a_1 não figura.

A resposta é $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

Observação: As duas soluções apresentadas mostram que $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}. = C_{n-1}^p$. Essa é a famosa Relação de Stifel.

c) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-2$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-2}^{p-2}.

d) O total de p-subconjuntos é C_n^p. Para formar um subconjunto em que nem a_1 nem a_2 figurem devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto. Há, portanto, C_{n-2}^p subconjuntos nos quais nem a_1 nem a_2 figuram. Logo, o número de subconjuntos nos quais pelo menos um desses dois elementos figura é $C_n^p - C_{n-2}^p$.

Outra solução:

Há C_{n-1}^{p-1} p-subconjuntos nos quais o elemento a_1 figura e há C_{n-1}^{p-1} subconjuntos nos quais o elemento a_2 figura. Há, também, C_{n-2}^{p-2} p-

subconjuntos nos quais os elementos a_1 e a_2 figuram ambos. Ao somarmos $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-1} = 2C_{n-1}^{p-1}$ obtemos o número de subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura, mas contamos duas vezes aqueles em que a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$.

Outra solução:

Há, como mostrado em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

Há C_{n-2}^{p-1} p-subconjuntos em que o elemento a_1 figura e o elemento a_2 não figura, pois, para formar um tal subconjunto, basta escolher os outros $p-1$ elementos do subconjunto dentre os $n-2$ elementos do conjunto que são diferentes de a_1 e de a_2.

Há, analogamente, C_{n-2}^{p-1} p-subconjuntos em que o elemento a_2 figura e o elemento a_1 não figura. Portanto, o número de p-subconjuntos em que figura pelo menos um desses dois elementos é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

e) Como visto na solução anterior, a resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

Outra solução:

Há, como visto em d), $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$ p-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} =$

$= 2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}$.

Outra solução:

Há, como visto em d), $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$ p-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} =$

$= 2C_{n-2}^{p-1}$.

23) a) Como há 32 cartas, a resposta é $C_{32}^{5} = 201.376$.

b) Há 8 modos de escolher o grupo do par propriamente dito (por exemplo, valete), C_4^2 modos de escolher os naipes das duas cartas do par (por exemplo, copas e paus), C_7^3 modos de escolher os grupos das outras três cartas (por exemplo, 10, 8 e rei) e $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ modos de escolher os naipes dessas três cartas.

A resposta é $8 \times C_4^2 \times C_7^3 \times 4^3 = 107.520$.

c) Há C_8^2 modos de escolher os grupos das cartas que formarão os dois pares, $(C_4^2)^2$ modos de escolher seus naipes, 6 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher seu naipe.

A resposta é $C_8^2 \times (C_4^2)^2 \times 6 \times 4 = 24.192$.

Observação: Um erro muito comum é o exposto a seguir.

Há 8 modos de escolher o grupo do primeiro par, C_4^2 modos de escolher os naipes do primeiro par, 7 modos de escolher o grupo do segundo par, C_4^2 modos de escolher os naipes do segundo par, 6 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher seu naipe. A resposta ERRADA seria $8 \times C_4^2 \times 7 \times C_4^2 \times 6 \times 4 = 48.384$. A explicação do ERRO é simples: Ao fazermos a inexistente distinção entre primeiro par e segundo par, contamos pares de valetes e reis como diferentes de pares de reis e valetes.

A resposta ERRADA pode ser corrigida dividindo-a por 2.

d) Há 8 modos de escolher o grupo da trinca, C_4^3 modos de escolher os naipes das cartas da trinca, C_7^2 modos de escolher os grupos das outras duas cartas e $4 \times 4 = 4^2$ modos de escolher os naipes dessas duas cartas.

A resposta é $8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4^2 = 10.752$.

e) Há 8 modos de escolher o grupo do "four", 1 modo de escolher os naipes das quatro cartas do "four", 7 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher o naipe dessa carta.

A resposta é $8 \times 1 \times 7 \times 4 = 224$.

f) Há 8 modos de escolher o grupo da trinca, C_4^3 modos de escolher os naipes das cartas da trinca, 7 modos de escolher o grupo do par e C_4^2 modos de escolher os naipes das cartas do par.

A resposta é $8 \times C_4^3 \times 7 \times C_4^2 = 1.344$.

g) Há apenas 4 tipos de seqüências: 7, 8, 9, 10, valete; 8, 9, 10, valete, dama; 9, 10, valete, dama, rei; 10, valete, dama, rei, ás. Escolhido o

tipo da seqüência, haveria $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ modos de escolher os naipes das cartas da seqüência, mas 4 desses modos não são permitidos: todas de ouros, todas de paus, todas de copas e todas de espadas.

A resposta é $4 \times [4^5 - 4] = 4.080$.

h) Os grupos das cartas podem ser escolhidos de $C_8^5 - 4$ modos e o naipe único, de 4 modos.

A resposta é $(C_8^5 - 4) \times 4 = 208$.

i) Há 4 modos de escolher os grupos das cartas e 4 modos de escolher o naipe único.

A resposta é $4 \times 4 = 16$.

j) Há 4 modos de escolher o naipe único. A resposta é 4.

24) a) Neste caso f é bijetiva e, se $\#A = \#B = n$, o número de funções $f : A \to B$ bijetivas é $n!$, como foi mostrado no exercício 4 da seção 2.2.

b) Neste caso dois elementos de A terão uma mesma imagem em B e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B será bijetiva.

Há $\binom{n+1}{2}$ modos de escolher os dois elementos de A, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.

A resposta é $\binom{n+1}{2} \cdot n \cdot (n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

c) Neste caso temos as alternativas:

i) Três elementos de A têm a mesma imagem em B e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B é bijetiva.

Há $\binom{n+2}{3}$ modos de escolher os três elementos de A, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes.

Há $\binom{n+2}{3}.n.(n-1)! = \dfrac{n(n+2)!}{6}$ funções desse tipo.

ii) Há dois pares de elementos de A com imagens idênticas em B e a correspondência entre os demais $n-2$ elementos de A e os demais $n-2$ elementos de B é bijetiva.

Há $\binom{n}{2}$ modos de escolher os dois elementos de B, $\binom{n+2}{2} \times \binom{n}{2}$ modos de escolher suas imagens inversas em A e $(n-2)!$ modos estabelecer a correspondência entre os elementos restantes.

Há $\binom{n}{2} \times \binom{n+2}{2} \times \binom{n}{2} \times (n-2)! = \dfrac{n(n-1)(n+2)!}{8}$ funções desse tipo.

A resposta é $\dfrac{n(n+2)!}{6} + \dfrac{n(n-1)(n+2)!}{8} = \dfrac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$.

25) Chamemos de D o conjunto $C - C_1$.

Há quatro tipos de planos:

i) determinados por três pontos de D;

ii) determinados por dois pontos de D e um de C_1;

iii) determinados por um ponto de D e dois de C_1;

iv) determinados por três pontos de C_1.

A resposta é $C_{12}^3 + C_{12}^2.8 + 12.C_8^2 + 1 = 1.085$.

Outra solução:

Para determinar um plano, devemos selecionar 3 dos 20 pontos, o que pode ser feito de $C_{20}^3 = 1140$ modos. Nessa contagem, o plano que contém os 8 pontos de C_1 foi contado $C_8^3 = 56$ vezes.

A resposta é $1.140 - 56 + 1 = 1.085$.

26) Escolhida a ordem de cada casal, o que pode ser feito de 2^3 modos temos que arrumar em fila 4 espaços vazios e 3 casais, o que pode ser feito de C_7^4 modos (escolha dos espaços vazios) vezes 3! (colocação dos 3 casais nos 3 lugares restantes).

A resposta é $2^3 \times C_7^4 \times 3! = 1.680$.

27) Primeiro, colocamos as vogais. Como a letra A aparece 3 vezes e as letras U, I e O aparecem 1 vez cada, o número de modos de dispô-las é $P_6^{3,1,1,1} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{720}{6} = 120$. A seguir, colocamos as consoantes em três dos 7 espaços antes, entre e depois das vogais. O lugar do P pode ser qualquer um destes 7 espaços, o do R qualquer dos 6 restantes e o do G qualquer dos 5 restantes. O número total de possibilidades é $120.7.6.5 = 25.200$.

28) Vamos formar uma fila com os números $1, 2, \ldots n$ e assinalar com **E** os p números escolhidos e com **N** os $n - p$ não escolhidos. A condição para que não sejam escolhidos números consecutivos é que entre dois **E** haja pelo menos um **N**. Começamos escrevendo os $n - p$ **E**. A seguir, devemos escolher, para colocar os **E**, p dentre os $n - p + 1$ espaços situados antes, entre e depois dos **N**. Isto pode ser feito de C_{n-p+1}^{p} modos.

29) Chegam 4 cientistas A, B, C, D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir. Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de ABCD. Portanto, ABCD é o cadeado cuja chave não está em poder de A, nem de B, nem de C e nem de D. Qualquer outro cientista tem a chave desse cadeado, pois esse cientista e A, B, C e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui a chave. Como o alguém não é nem A, nem B, nem C e nem D, deve ser o outro. Analogamente batize os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é biunívoca, isto é, cadeados diferentes têm nomes diferentes (isso porque estamos na situação do número mínimo de cadeados) e cadeados de nomes diferentes são diferentes (se X está no nome de um cadeado e não está no nome do outro, X tem a chave deste e não tem a chave daquele).

a) O número mínimo de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados, $C_1^4 1 = 330$.

b) Cada cientista X possui as chaves dos cadeados que não possuem X no nome, $C_1^4 0 = 210$.

30) Nenhum aluno pode comparecer a mais de três jantares. Com efeito, se A_1 vai a um jantar com A_2 e A_3, ele só pode ir a outro jantar com outros dois estudantes, digamos A_4 e A_5 e só pode ir a um terceiro jantar em companhia de outros dois, digamos A_6 e A_7 e não terá companhia para ir a um quarto jantar. Como há 21 convites e são 7 estudantes, cada estudante terá que comparecer a exatamente 3 jantares.

Se A_1 comparece a três jantares, podemos escolher os seus companheiros dividindo os outros 6 estudantes em 3 grupos de 2, o que pode ser feito de $\dfrac{C_6^2 \times C_4^2 \times 1}{3!} = 15$ modos.

Então, os 3 jantares são, digamos, $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7$.

A_2 deverá comparecer a mais dois jantares, nenhum deles em companhia de A_3, e A_3 também deverá comparecer a mais dois jantares. Portanto, os 4 jantares que faltam são:

$A_2__$, $A_2__$, $A_3__$, $A_3__$

Como A_4 deve comparecer a mais dois jantares (A_4 não pode comparecer a ambos em companhia de A_2 nem a ambos em companhia de A_3), esses quatro jantares são:.

$A_2A_4_$, $A_2__$, $A_3A_4_$, $A_3__$;

A_5 tem que comparecer ainda a dois jantares, nenhum deles em companhia de A_4.

$A_2A_4_$, $A_2A_5_$, $A_3A_4_$, $A_3A_5_$.

Agora há duas possibilidades:

$A_2A_4A_6$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_4A_7$, $A_3A_5A_6$ e

$A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_3A_5A_7$.

Há portanto $15 \times 2 = 30$ maneiras de escolher os grupos de convidados.

Para distribuir os 7 grupos nos 7 dias, há 7! alternativas.

A resposta é $7! \times 30 = 151.200$.

31) Os dois primeiros lugares só podem ser ocupados por elementos de $\{a_1, a_2, \cdots a_7\}$ e os dois últimos por elementos de $\{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

A resposta é $C_7^2 \times C_4^2 = 126$.

32) Há $C_{m+h}^{m} \times 1$ modos de escolher os lugares para os homens. Feito isso, só há 1 modo de formar a fila.

A resposta é $C_{m+h}^{m} \times 1 = C_{m+h}^{m}$.

33) a) Cada professor fica caracterizado pelas duas bancas a que pertence. O número de professores é igual ao número de modos de escolher duas das oito bancas.

A resposta é $C_8^2 = 28$.

b) O número de professores pertencentes a uma banca é igual ao número de modos de escolher a outra banca a que ele pertence.

A resposta é 7.

34) a) Imagine um quadro em que cada linha é a relação dos atletas de um time. O número de elementos do quadro é o número de times, t, multiplicado pelo tamanho de cada time, k, e é também igual ao número de atletas, a, multiplicado pelo número de times de que cada atleta participa, x.

Logo, $ax = tk$ e $x = \dfrac{tk}{a}$.

b) No mesmo quadro, o número de pares de atletas na mesma linha é igual ao número de linhas, t, multiplicado pelo número de pares de atletas em uma linha, C_k^2, e é também igual ao número de pares de atletas, C_a^2, multiplicado pelo número de times em que cada par de atletas fica junto, y.

Logo, $yC_a^2 = tC_k^2$ e $y = \dfrac{tC_k^2}{C_a^2} = \dfrac{tk(k-1)}{a(a-1)}$.

35) A resposta é o número de permutações circulares de 4 elementos, ou seja, $3! = 6$.

36) Há $(PC)_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de $5!$ modos. A resposta é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2.880$.

37) É mais simples calcular o número total de rodas e excluir aquelas em que Vera e Isadora ficam juntas. O número total de rodas é $PC_6 = 5! = 120$. Para formar as rodas em que Vera e Isadora ficam juntas, a

primeira decisão a tomar é a ordem em que Vera e Isadora se colocarão na roda. Há 2 possibilidades: Vera-Isadora e Isadora-Vera. Agora tudo se passa como se Vera e Isadora fossem uma única criança. Assim, há $2(PC)_5 = 2.4! = 48$ rodas em que Vera e Isadora ficam juntas. A resposta é $120 - 48 = 72$ rodas.

38) Chamando x de $1+a$, y de $1+b$ e z de $1+c$, o problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não- negativas de $(a+1)+(b+1)+(c+1) = 7$, ou seja, de $a+b+c = 4$. A resposta é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.

39) Cada solução inteira e não negativa da inequação $x + y + z \leq 6$ corresponde a uma solução inteira e não negativa da equação $x+y+z+f = 6$. Logo, há $CR_4^6 = C_9^6 = 84$ soluções.

40) Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 20$, onde x_i é o número de bombons do tipo i. A resposta é $CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10.626$.

Soluções dos Exercícios da Seção 5.1

1) Há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis igualmente prováveis, em 6 dos quais a soma vale 7. A resposta é $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2) Basta escolher os times do primeiro grupo, o que pode ser feito de C_{24}^{12} modos. Os dois times em questão ficam juntos quando ficam ambos no primeiro grupo ou ambos no segundo grupo. Em ambos os casos, isto pode ser feito de C_{22}^{10} modos. Logo, a resposta é $\dfrac{2C_{22}^{10}}{C_{24}^{12}} = \dfrac{2.22!.12!}{24!10!} = \dfrac{11}{23}$.

Outra solução:

Supondo já escolhido o grupo do primeiro time, seus 11 companheiros de grupo podem ser escolhidos de C_{23}^{11} modos. Dentre os grupos assim formados os que também incluem o segundo time são C_{22}^{10}, já que são formados escolhendo 10 times entre os 22 restantes. Logo, a resposta é $\dfrac{C_{22}^{10}}{C_{23}^{11}} = \dfrac{11}{23}$.

3) Usaremos o fato, já provado, de que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Temos:

$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$.

Agora, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e, daí,

$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$
$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$.

Substituindo na expressão anterior, obtemos, finalmente:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cup C) + P(A \cap B \cap C)$.

4) a) Como $A \subset A \cup B$, temos $P(A \cup B) \geq P(A) = \dfrac{2}{3}$.

b) Como $A \cap B$ e B são disjuntos e $A \cap \overline{B} \cup B = A \cup B$, temos $P(A \cap \overline{B}) + P(B) = P(A \cup B)$ e, portanto,

$P(A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) - P(B) = P(A \cup B) - \dfrac{4}{9}$.

Mas, do item anterior, $\dfrac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$. Daí,

$\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq 1 - \dfrac{4}{9}$, ou seja, $\dfrac{2}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq \dfrac{5}{9}$.

c) Observe que $P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$, já que o conjunto da direita é a união disjunta dos da esquerda. Daí, $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{3} - P(A \cap \overline{B})$. Como $\dfrac{2}{9} \leq P(A \cap \overline{B}) \leq \dfrac{5}{9}$, temos $\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{9} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9}$, ou seja, $\dfrac{1}{9} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{4}{9}$.

5) a) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6.C_5^2.5.4.3 = 3600$, pois há 6 modos de escolher o tipo do par (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há C_5^2 modos de escolher os dois dados que formarão o par; quanto aos outros dados, o resultado do primeiro deles pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado dos dois primeiros dados), o do segundo pode ser escolhido de 4 modos distintos (deve ser diferente dos anteriores) e, o do terceiro, de 4 modos diferentes.

Logo, $P(A_2) = \dfrac{3.600}{6^5} = \dfrac{25}{54} \equiv 0,463.$

b) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $C_6^2.C_5^2.C_3^2.4 = 1800$, pois há C_6^2 modos de escolher os tipos dos pares (podem ser de 1 e 2, de 1 e 3, ..., de 5 e 6), há C_5^2 modos de escolher os dois dados que formarão o par menor e C_3^2 modos de escolher os dados que formarão o par maior. Para o dado restante, que deve ter resultado diferente do dos demais dados, há 4 resultados possíveis.

Logo, $P(A_3) = \dfrac{180}{6^5} = \dfrac{25}{108} \equiv 0,231.$

Observação:

Um erro bastante comum é contar os casos favoráveis em dobro, raciocinando do modo seguinte: Há 6 modos de escolher o tipo do primeiro par, 5 modos de esco lher o tipo do segundo par, C_5^2 modos de escolher os dois dados que formarão o primeiro par, C_3^2 modos de escolher os dados que formarão o segundo par e há 4 modos de escolher o resultado do dado restante. Logo, o número de casos favoráveis é $6.5.C_5^2.C_3^2.4 = 3.600$.

É claro que o erro provém da distinção artificial entre o primeiro e o segundo par, que faz com que um par de 2 e um par de 5 seja considerado diferente de um par de 5 e um par de 2.

c) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6.C_5^3.5.4 = 1200$, pois há 6 modos de escolher o tipo da trinca (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há C_5^3 modos de escolher os três dados que terão resultados iguais; quanto aos outros dados, o resultado do primeiro deles pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado dos três primeiros dados) e, o do segundo, de 4 modos distintos (deve ser diferente dos anteriores).

Logo, $P(A_4) = \dfrac{1.200}{6^5} = \dfrac{25}{162} \equiv 0,154.$

d) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6.C_5^4.5 = 150$, pois há 6 modos de escolher o tipo da quadra (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há C_5^4 modos de escolher os quatro dados que terão resultados iguais;

quanto ao dado restante, seu resultado pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado dos quatro primeiros dados).

Logo, $P(A_6) = \dfrac{150}{6^5} = \dfrac{25}{1.296} \equiv 0,019$.

e) O número de casos possíveis é 6^5 e o número de casos favoráveis é 6.

Logo, $P(A_7) = \dfrac{6}{6^5} = \dfrac{1}{1.296} \equiv 0,0008$.

f) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. Há dois tipos possíveis de seqüências: a mínima (12345) e a máxima (23456). A mínima pode ser formada de $5! = 120$ modos distintos, pois há 5 modos de escolher o dado cujo resultado é 1, 4 modos de escolher o dado cujo resultado é 2, etc. Há, analogamente, 120 modos de formar a seqüência máxima.

Portanto, $P(A_8) = \dfrac{240}{6^5} = \dfrac{5}{162} \equiv 0,031$.

g) O número de casos possíveis é 6^5, pois há 6 resultados para cada um dos 5 dados. O número de casos favoráveis é $6.C_5^3.5 = 300$, pois há 6 modos de escolher o tipo da trinca (pode ser de 1, de 2, ..., de 6) e há C_5^3 modos de escolher os três dados que formarão a trinca; quanto aos outros dados, há 5 modos distintos de escolher o resultado comum deles.

Logo, $P(A_5) = \dfrac{300}{6^5} = \dfrac{25}{648} \equiv 0,039$.

6) Numeremos os vértices do polígono de 0 a $2n$. Imagine 0 como o vértice mais alto, os vértices de 1 a n do lado direito e os vértices de $n+1$ a $2n$ do lado esquerdo. Podemos pensar que todos os triângulos têm 0 como um dos vértices. Há $C_{2n}^2 = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ modos de selecionar os outros dois vértices do triângulo.

Para contar o número de triângulos que contêm o centro da circunferência circunscrita em seu interior, observe inicialmente que a reta que contém o vértice $i (1 \leq i \leq n)$ e o centro da circunferência corta novamente o polígono no ponto médio do segmento determinado pelos vértices $i+n$ e $i+n+1$ (vértice $2n+1 =$ vértice 0).

Um triângulo que contenha em seu interior o centro da circunferência será necessariamente formado por um vértice do lado direito e um

vértice do lado esquerdo. Se o vértice do lado direito for o vértice 1, o do lado esquerdo só poderá ser o vértice $n+1$ (1 possibilidade); se for o vértice 2, poderá ser qualquer dos vértices de $n+1$ a $n+2$ (2 possibilidades); ...; se for o vértice n, poderá ser qualquer dos vértices de $n+1$ a $2n$ (n possibilidades). O número de casos favoráveis é $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

A resposta é $\dfrac{n+1}{2(2n-1)}$.

7) Imagine o resultado do sorteio como uma fila de 12 lugares: o primeiro lugar corresponde à primeira pessoa sorteada para o primeiro grupo; o segundo, à segunda pessoa sorteada para o segundo grupo; ...; o último, à quarta pessoa sorteada para o terceiro grupo. Colocada a primeira pessoa, há 11 posições para a segunda, em 3 das quais ela fica no mesmo grupo da primeira.

A resposta é $\dfrac{3}{11}$.

8) Há 12 possibilidades para o signo de cada pessoa, para um total de 12^4 possibilidades. Para que não haja coincidências de signos, o signo da primeira pessoa pode ser escolhido de 12 modos, o da segunda de 11, o da terceira de 10 e o da quarta de 9, para um total de 12.11.10.9 modos. Assim, a probabilidade de que não haja coincidência de signos é $\dfrac{12.11.10.9}{12^4} = \dfrac{55}{96}$ e a probabilidade de que não haja coincidências é $1 - \dfrac{55}{96} = \dfrac{41}{96}$.

9) Há C_{10}^4 modos de retirar 4 pés de sapatos. Para retirar 4 pés, havendo nesses 4 pés exatamente 1 par de sapatos, devemos inicialmente selecionar 1 par (o que pode ser feito de 5 modos) e depois selecionar 2 pés vindo de pares diferentes dentre os 4 pares que ainda estão no armário. Para isso devemos escolher os pares de onde virão esses sapatos (C_2^4 modos) e, em cada par escolhido, decidir se retiraremos o pé direito ou o pé esquerdo ($2^2 = 4$ modos).

A resposta é $\dfrac{5.C_4^2.4}{C_{10}^4} = \dfrac{4}{7}$.

10) Para distribuir os sorvetes, devemos escolher as pessoas que receberão sorvetes de creme (C_{10}^5 modos) e dar sorvetes de chocolate às demais (1 modo). Para distribuir os sorvetes, respeitando as preferências, começamos dando sorvetes de creme aos que gostam de creme e de chocolate aos que gostam de chocolate (1 modo). Em seguida, devemos distribuir 2 sorvetes de creme e 3 sorvetes de chocolate a 5 pessoas que não têm preferências; para isso, devemos escolher as 2 pessoas que receberão sorvetes de creme (C_5^2 modos) e dar sorvetes de chocolate às restantes (1 modo).

A resposta é $\dfrac{C_5^2}{C_{10}^5} = \dfrac{5}{126}$.

11) As peças do dominó são formadas por dois, não necessariamente distintos, dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Há $CR_7^2 = C_8^2 = 28$ peças e há C_{28}^2 modos de selecionar duas peças de um dominó. Para selecionar duas peças com um número comum, deve-se primeiramente selecionar o número comum (7 possibilidades) e, depois, selecionar 2 das 7 peças que contêm esse número comum (C_7^2 possibilidades).

A resposta é $\dfrac{7C_7^2}{C_{28}^2} = \dfrac{7}{18}$.

12) O número de sorteios possíveis é C_{80}^5.

a) O apostador acerta 3 dezenas quando são sorteadas 3 das 8 dezenas em que apostou e 2 das 72 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $C_8^3.C_{72}^2$ modos.

A resposta é $\dfrac{C_8^3.C_{72}^2}{C_{80}^5}$ (que é aproximadamente igual a $\dfrac{1}{168}$).

b) O apostador acerta 4 dezenas quando são sorteadas 4 das 8 dezenas em que apostou e 1 das 72 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $C_8^4.C_{72}^1$ modos.

A resposta é $\dfrac{C_8^4.C_{72}^1}{C_{80}^5}$(que é aproximadamente igual a $\dfrac{1}{4770}$).

c) O apostador acerta 5 dezenas quando são sorteadas 5 das 8 dezenas em que apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de C_8^5 modos.

A resposta é $\dfrac{C_8^5}{C_{80}^5} = \dfrac{1}{429.286}$.

13) Colocada a primeira pessoa na roda, há $n-1$ posições possíveis para a segunda pessoa, das quais 2 são favoráveis a que ela fique junto da primeira pessoa.

A resposta é $\dfrac{2}{n-1}$.

14) a) Há n posições igualmente prováveis que a chave "certa" poderia ocupar: ser a primeira a ser testada, a segunda,..., a última. A probabilidade de ela ocupar a k-ésima posição é $1/n$.

Outra solução:

Há $n!$ maneiras de ordenar as chaves a serem tentadas. Para formar as ordenações que tem a chave certa na k-ésima posição, devemos colocar as $n-1$ chaves restantes nas $n-1$ posições restantes, o que pode ser feito de $(n-1)!$ modos. Logo, a probabilidade de que a chave certa esteja na posição k é $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

b) As primeiras k tentativas podem ser feitas de n^k modos (cada chave pode ser escolhida de n modos, já que chaves correspondentes a tentativas frustradas não são descartadas). Para que se acerte na k- ésima tentativa, as primeiras $k-1$ chaves devem ser incorretas (portanto, podem ser escolhidas de $(n-1)^{k-1}$ modos) e a de ordem k deve ser a correta (1 modo). Logo, a probabilidade de se acertar na k-ésima tentativa é $\dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$.

15) a) Há $C_{12}^4 = 495$ modos de selecionar as 4 vagas que não serão ocupadas e 9 modos de escolher 4 vagas consecutivas (1 2 3 4, 2 3 4 5, ..., 9 10 11 12).

A resposta é $\dfrac{9}{495} = \dfrac{1}{55}$.

b) Há $C_{12}^4 = 495$ modos de selecionar as 4 vagas que não serão ocupadas. Para contar o número de possibilidades em que não há vagas vazias adjacentes, devemos escolher 4 dos 9 espaços existentes antes, entre e depois dos carros para ficarem vazios. Isto pode ser feito de C_9^4 modos. Logo a probabilidade de que não haja vagas consecutivas é é $\dfrac{126}{495} = \dfrac{14}{55}$.

16) $P(A \cap B \cap C) = 0$, pois $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ e $P(A \cap C) = 0$.

a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$
$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$= 0,4 + 0,5 + 0,3 - 0,3 - 0 - 0,1 + 0 = 0,8.$

b) $P[A - (B \cup C)] = P(A) - P[A \cap (B \cup C)] =$
$= P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] =$
$= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] =$
$= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$= 0,4 - 0,3 - 0 + 0 = 0,1.$

c) $P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] =$
$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] =$
$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,3 + 0 - 0 = 0,3.$

d) $P[(A \cap B) \cup C] = P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) =$
$= 0,3 + 0,3 - 0 = 0,6$

18) a) A resposta, naturalmente, é $1/2$, já que, de todos os pares de números distintos de 1 a 100, em exatamente a metade o primeiro número é maior do que o segundo.

b) O número total de possíveis extrações é $100 \times 100 = 10.000$, já que o bilhete de cada uma das moças pode ser escolhido de 100 modos. Em 100 destas possíveis extrações os dois números são iguais e em metade das restantes, ou seja, em $9900/2 = 4950$ delas, o primeiro número é maior do que o segundo. Logo, a probabilidade de o número de Laura ser maior do que o de Telma é $\dfrac{4950}{10000} = 0,495$.

19) a) São feitos 5 testes quando uma das quatro primeiras pilhas testadas está descarregada, o mesmo ocorrendo com a quinta a ser testada. A primeira pilha a ser testada pode ser escolhida de 10 modos, a segunda de 9, e assim por diante, para um total de 10.9.8.7.6 modos possíveis para escolher as 5 primeiras pilhas a serem testadas. Para formar uma sequência de teste em que a segunda defeituosa é detectada na 5ª tentativa, devemos escolher a pilha defeituosa que aparece na 5ª posição (2 modos), a posição da outra defeituosa (4 modos) e, finalmente, as

pilhas não defeituosas para as demais posições (8.7.6 modos). Logo, a probabilidade pedida é $\dfrac{2.4.8.7.6}{10.9.8.7.6} = \dfrac{4}{45}$.

b) São efetuados até 5 testes quando as pilhas defeituosas aparecem nas 5 primeiras tentativas. Como visto no item anterior, há 10.9.8.7.6 modos de se fazer estas tentativas. Para formar aquelas em que as duas defeituosas estão entre as testadas devemos escolher a posição da primeira pilha defeituosa (5 modos), a da segunda (4 modos) e, finalmente, as pilhas não defeituosas para as outras tentativas (8.7.6 modos). A probabilidade de que sejam feitos até 5 testes é $\dfrac{5.4.8.7.6}{10.9.8.7.6} = \dfrac{2}{9}$ e, portanto, a probabilidade pedida é igual a $1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

c) Para que sejam feitos menos de 4 testes, as duas pilhas defeituosas devem aparecer nos primeiros 4 testes. O número total de escolhas para os 4 primeiros testes é 10.9.8.7. Para formar uma sequência de teste em que as duas defeituosas aparecem nestas 4 tentativas, devemos escolher a posição da primeira pilha defeituosa (4 modos), a da segunda (3 modos) e, finalmente, as pilhas não defeituosas para as duas outras posições (8.7 modos). A probabilidade pedida é $\dfrac{4.3.8.7}{10.9.8.7} = \dfrac{2}{15}$.

Soluções dos Exercícios da Seção 5.2

1) Sejam X e Y os resultados do primeiro e segundo lançamentos, respectivamente. $P(X = 3 \mid X + Y = 7) =$

$$= \frac{P(X = 3, X + Y = 7)}{P(X + Y = 7)} = \frac{1/6 \cdot 1/6}{6/36} = \frac{1}{6}.$$

Outra solução:

Se a soma é 2, há 6 casos possíveis igualmente prováveis: $X = 1, Y = 6; X = 2, Y = 5; X = 3, Y = 4; X = 4, Y = 3; X = 5, Y = 2; X = 6, Y = 1$. Dos seis casos, somente $X = 3, Y = 3$ é favorável. A resposta é $\dfrac{1}{6}$.

2) $P(\text{não sabe} \mid \text{acerta}) = \dfrac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{acerta})} =$

$$= \frac{P(\text{não sabe}).P(\text{acerta} \mid \text{não sabe})}{P(\text{sabe}).P(\text{acerta} \mid \text{sabe}) + P(\text{não sabe}).P(\text{acerta} \mid \text{não sabe})} =$$

$$= \frac{0,4.0,2}{0,6.1 + 0,4.0,2} = \frac{2}{17}.$$

3) $P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A) = 1/2.1/2 = P(A).P(B)$; logo, A e B são independentes.

Observe que $A \cap C = A \cap B$ e que $P(C) = \frac{1}{2}.P(A \cap C) = P(A \cap B) = 1/2.1/2 = P(A).P(C)$; logo, A e C são independentes.

Observe que $B \cap C = A \cap B$ e que $P(C) = \frac{1}{2}.P(B \cap C) = P(A \cap B) = 1/2.1/2 = P(B).P(C)$; logo, B e C são independentes.

Como $A \cap B \cap C = A \cap B, P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = 1/2.1/2$, que é diferente de $P(A).P(B).P(C) = 1/2.1/2.1/2$; logo, A, B e C não são independentes.

4) a) A probabilidade de nenhum seis em quatro lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \equiv 0,4823$. A probabilidade de pelo menos1 seis é $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \equiv 1-0,4823 = 0,5177$

b) A probabilidade de nenhum duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados é $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \equiv 0,5086$. A probabilidade de pelo menos 1 duplo seis é $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \equiv 1 - 0,5086 = 0,4914$.

5) $P(\text{doente} \mid \text{positivo}) = \frac{P(\text{doente e positivo})}{P(\text{positivo})} =$

$$= \frac{P(\text{doente}).P(\text{positivo} \mid \text{doente})}{P.(\text{doente}).P(\text{positivo} \mid \text{doente}) + P(\text{sadio}).P(\text{positivo} \mid \text{sadio})} =$$

$$= \frac{0,005 \cdot 0,95}{0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,01} = \frac{95}{294} \cong 0,3231$$

6) A probabilidade de não obter nenhum seis em n lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ e a

de obter pelo menos um seis é $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Devemos ter $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$, ou seja, $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$.

Daí, $\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln 0,1$

$n \cdot \ln\frac{5}{6} < \ln 0,1$

$n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \cong 12,6$

A resposta é 13.

7) a) Cada pessoa tem n modos de escolher a quem conta o boato. Logo, o número de modos de o boato ser contado m vezes é n^m.

O número de modos de o boato ser contado m vezes, sem retornar à primeira pessoa é $n(n-1)^{m-1}$, pois o primeiro ouvinte pode ser selecionado de n modos e os demais, de $n-1$ modos. A resposta é $\dfrac{n(n-1)^{m-1}}{n^m} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{m-1}$.

b) Cada pessoa pode tem n modos de escolher a quem conta o boato. Logo, o número de modos de o boato ser contado m vezes é n^m.

Para o boato ser contado m vezes, sem repetir nenhuma pessoa, o primeiro ouvinte pode ser selecionado de n modos; o segundo, de $n-1$ modos; o terceiro, de $n-2$ modos; $\cdots$; o m-ésimo, de $n-(m-1) = n-m+1$ modos. O número de modos de o boato ser contado m vezes, sem retornar à primeira pessoa, é $n.(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

A resposta é $\dfrac{n!}{(n-m)!n^m}$.

8) Considere os eventos:

$A = \{A$ falou a verdade $\}$;

$B = \{B$ disse que A falou a verdade$\}$;

$C = \{C$ disse que B disse que A falou a verdade$\}$;

$D = \{D$ disse que C disse que B disse que A falou a verdade$\}$.

Vamos aliviar a notação escrevendo XY para representar $X \cap Y$.

Queremos calcular $P(A \mid D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)}$.

$P(AD) = P(ABCD) + P(A\overline{B}CD) + P(AB\overline{C}D) + P(A\overline{BC}D) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{81}$

$P(\overline{A}D) = P(\overline{A}BCD) + P(\overline{AB}CD) + P(\overline{A}B\overline{C}D) + P(\overline{ABC}D) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28}{81}$.

$P(D) = P(AD) + P(\overline{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}$.

A resposta é $P(A \mid D) = \dfrac{P(AD)}{P(D)} = \dfrac{13/81}{41/81} = \dfrac{13}{41}$.

9) Uma urna recebe uma bola branca e a outra urna recebe as demais 99 bolas. Com efeito, se a 1ª urna recebe k bolas das quais a são brancas, a probabilidade de libertação é

$$f(a,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{k} + \frac{50-a}{100-k}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{50k + a(100-2k)}{k(100-k)}.$$

Observe que para k=50 a expressão vale $\frac{1}{2}$, independentemente do valor de a.

Observe também que basta estudar agora o caso $k < 50$ (isto é, podemos considerar a primeira urna como sendo a que recebeu menos bolas). Nesse caso, é claro que, fixado o valor de k, quanto maior for a, maior será $f(a,k)$. Logo, para $f(a,k)$ ser máximo, devemos ter $a = k$ e a probabilidade será $g(k) = \frac{1}{2}\frac{150-2k}{100-k} = \frac{75-k}{100-k} = 1 - \frac{25}{100-k}$, que é máxima para k mínimo.

Devemos, pois, ter $k = 1$, o que dá uma probabilidade de libertação de $\frac{74}{99} \cong 0,75$.

10) a) A probabilidade de eles se enfrentarem na primeira rodada é $\frac{1}{2^n - 1}$ porque, posto A na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para B e em 1

delas ele enfrenta B. A probabilidade de eles se enfrentarem na segunda rodada é $\frac{2}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2}$, porque posto A na tabela, há 2^n-1 posições possíveis para B e em 2 delas ele pode vir a enfrentar B na segunda rodada, desde que, naturalmente, A e B vençam seus jogos da primeira rodada, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. A probabilidade de eles se enfrentarem na terceira rodada é $\frac{2^2}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^2}$, etc.

A resposta é $\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+$

$$+\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

b) Se $k<n$, o jogador disputa exatamente k partidas se e somente se perde a k-ésima partida e ganha as $k-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$. O jogador disputa n partidas - ou seja, chega à final - se e somente se ganha as $n-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

A resposta é $\frac{1}{2^k}$, se $k<n$; $\frac{1}{2^{n-1}}$, se $k=n$.

11) a) O segundo melhor jogador será vice-campeão se e somente se não enfrentar o melhor jogador antes da final. Posto o melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para o segundo melhor e em 8 delas ele enfrenta o melhor jogador apenas na final. A resposta é $\frac{8}{15}$.

b) Posto o 4º colocado na tabela, os demais times podem ser colocados de 15! modos. Para que o 4º melhor time seja vice- campeão, os 3 melhores times não podem estar em sua chave. As posições destes times podem, portanto, ser escolhidas de 8, 7 e 6 modos, respectivamente. Para distribuir os 12 times restantes, há 12! Possibilidades. Logo, a probabilidade desejada é $\frac{8.7.6.12!}{15!} = \frac{8}{65}$.

c) Na primeira rodada, há 6 adversários que o 10º time consegue derrotar. Na melhor das hipóteses, ele derrota um destes e, dos outros 5, dois conseguem sobreviver para a próxima fase. De novo, na melhor das hipóteses o 10º enfrenta (e vence) um deles, mas o outro será fatalmente eliminado. Assim, na 3ª a rodada, o 10º time joga e perde. Logo, ele disputa no máximo três partidas. Isto ocorre quando os três times da sua chave para os dois primeiros jogos são todos de habilidade inferior. O número de modos de escolher 3 adversários é 15.14.13. O número de modos de escolher três adversários entre os 6 de nível inferior é 6.5.4. Logo, a resposta é $\dfrac{6.5.4}{15.14.13} = \dfrac{4}{91}$.

12) Se o candidato não troca de porta, ele ganha o prêmio se e só se escolhe, originalmente, a porta certa. Logo, se ele não troca, sua probabilidade de ganhar o prêmio é igual a $\dfrac{1}{3}$. Em contraste, ao trocar de porta ele ganha o prêmio sempre que escolheu originalmente a porta errada, o que ocorre com probabilidade $\dfrac{2}{3}$. Portanto, ele deve trocar de porta.

13) Cada um dos 10 resultados pode ser escolhido de 2 modos. Portanto, há 2^{10} resultados possíveis. Para formar um resultado com 5 caras, é necessário escolher 5 dos 10 lançamentos para estas caras ocorrerem, o que pode ser feito de C_{10}^5 modos. A probabilidade pedida é $\dfrac{C_{10}^5}{2^{10}} = \dfrac{63}{256}$.

14) a) $P(2^{\underline{a}}B) = P(1^{\underline{a}}B, 2^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P, 2^{\underline{a}}B) =$

$= P(1^{\underline{a}}B).P(2^{\underline{a}}B \mid 1^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P).P(2^{\underline{a}}B \mid 1^{\underline{a}}P) =$

$= \dfrac{4}{10}.\dfrac{6}{12} + \dfrac{6}{10}.\dfrac{4}{12} = \dfrac{2}{5}$

b) $P(1^{\underline{a}}B \mid 2^{\underline{a}}P) = \dfrac{P(1^{\underline{a}}B, 2^{\underline{a}}P)}{P(2^{\underline{a}}P)} =$

$$\frac{P(1^{\underline{a}}B).P(2^{\underline{a}}P \mid 1^{\underline{a}}B)}{P(1^{\underline{a}}B).P(2^{\underline{a}}P \mid 1^{\underline{a}}B) + P(1^{\underline{a}}P).P(2^{\underline{a}}P \mid 1^{\underline{a}}P)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{10}.\frac{6}{12}}{\frac{4}{10}.\frac{6}{12} + \frac{6}{10}.\frac{8}{12}} = \frac{1}{3}.$$

15) $P(\text{vê vermelha} \mid \text{mostra amarela}) = \dfrac{P(\text{vê vermelha e mostra amarela})}{P(\text{mostra amarela})} =$

$= \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3}.$

16) O jogador A ganha o prêmio se e somente se B ganhar no máximo 2 das próximas 8 partidas (caso contrário, B terá sua 10ª vitória antes de A completar sua série de 10 vitórias).

$P(\text{B ganhar 0 partida}) = 0,6^8 \cong 0,0168$

$P(\text{B ganhar 1 partida}) = 8.0,6^7.0,4 \cong 0,0896$

$P(\text{B ganhar 2 partidas}) = C_8^2.0,6^6.0,4^2 \cong 0,2090$

A probabilidade de que A ganhe o prêmio é aproximadamente igual a $0,0168 + 0,0896 + 0,2090 = 0,3154$.

17) Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ as probabilidades das possíveis ordenações $ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC$. As condições dadas no problema permitem escrever um sistema de equações lineares envolvendo aquelas probabilidades:

$$p_1 + p_4 = p_2 + p_6 = p_3 + p_5 = \frac{1}{3}$$
$$p_3 + p_6 = p_1 + p_5 = p_2 + p_4 = \frac{1}{3}$$
$$p_2 + p_5 = p_3 + p_4 = p_1 + p_6 = \frac{1}{3}$$

Resolvendo o sistema, verifica-se que ele tem uma infinidade de soluções, da forma

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6} - p_4 = \frac{1}{6} - p_5 = \frac{1}{6} - p_6$$

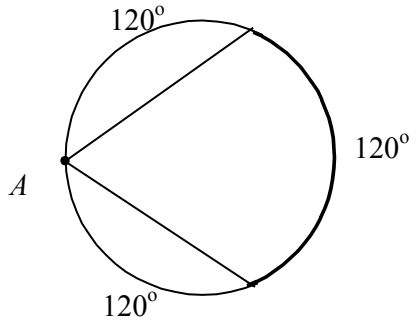
Em termos mais intuitivos, basta que as ordenações correspondentes à mesma ordem circular tenham probabilidades iguais, ou seja, devemos ter:

$P(ABC) = P(BCA) = P(CAB)$ e $P(ACB) = P(CBA) = P(BAC)$.

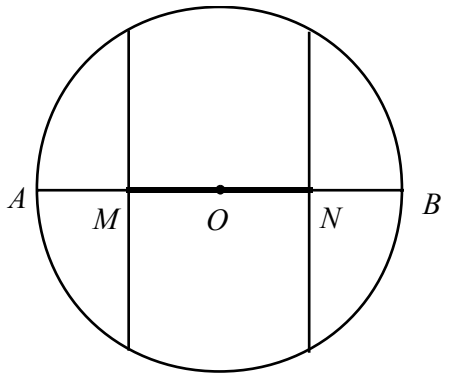
Por exemplo, se $P(ABC) = P(BCA) = P(CAB) = \dfrac{1}{4}$ e $P(ACB) = P(CBA) = P(BAC) = \dfrac{1}{12}$, os três jogadores têm a mesma chance

de ficar em primeiro, segundo ou terceiro lugar, embora as diferentes ordenações possíveis não tenham todas a mesma probabilidade de ocorrer.

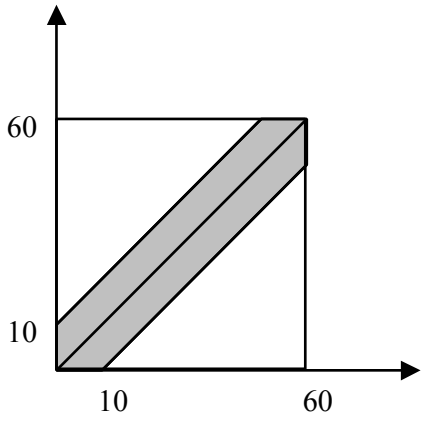
18) Dois pontos A e B de um círculo determinam uma corda maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito se e somente se o menor arco AB é maior do que 120º. Isto significa, que uma vez escolhido o ponto A, o ponto B não deve estar no arco de 240º com ponto médio em A, como mostra a figura. Como B é escolhido ao acaso, admitimos que a probabilidade de que ele esteja em um arco seja proporcional ao comprimento do arco. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.



19) Uma corda perpendicular a AB tem comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito se e somente se corta AB entre os pontos M e N, médios de OA e OB, onde O é o centro do círculo, como mostra a figura. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.



20) Contando o tempo em minutos, a partir das 16 horas, e designando por x e y os instantes de chegada de Cristina e Maria, a região "possível" é $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$ (um quadrado de lado 60) e a região "favorável" é $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60, |x - y| \leq 10\}$. A desigualdade $|x - y| \leq 10$ é equivalente a $x - 10 \leq y \leq x + 10$, o que mostra que a região favorável é uma "faixa" em torno da diagonal do quadrado, como mostra a figura.



A probabilidade desejada é:

$$\frac{\text{área de } A}{\text{área de } \Omega} = \frac{60^2 - 2.50.50/2}{60^2} = \frac{11}{36}.$$