A Matemática do Ensino Médio, volume 3

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 5

1. $1-\sqrt{3} = 2\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°$ $\quad (1-\sqrt{3})^5 = 2^5 \cdot \cos(5\times 300°) + i \operatorname{sen}(5\times 300°) = 32 \cdot \cos 1500° + i \operatorname{sen} 1500° = 32 \cdot \cos 60° + i \operatorname{sen} 60° = 32(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{16 + 16\sqrt{3}i}$

FIGURA

2. Seja $z = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{(1+ai)\cdot(1+ai)}{(1-ai)\cdot(1+ai)} = \frac{(1+ai)^2}{1+a^2} = \frac{1+2ai-a^2}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + i \cdot \frac{2a}{1+a^2}$

$|z|^2 = \left[\frac{1-a^2}{1+a^2}\right]^2 + \left[\frac{2a}{1+a^2}\right]^2 = \frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1+2a^2+a^4}{(1+a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2}{(1+a^2)^2} = 1$

$\boxed{\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right| = 1}$

3. Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

Seja θ o argumento de z, de modo que $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Seja $\omega = -x + y$ e α o argumento de ω. Como $\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, então $\omega = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$,

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$ e $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-y}{\rho}$ e $\cos\alpha = -\frac{x}{\rho}$

Então, $\alpha - \theta$ é igual a uma quantidade ímpar de meias voltas.

$$\boxed{\alpha - \theta = (2k+1)\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

4. Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

Seja θ o argumento de z, de modo que $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Então, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

FIGURAS

Seja α o argumento do conjugado $\bar{z}$. $\bar{z} = x - iy$. Portanto, $\tan\alpha = \frac{-y}{x} = -\tan\theta = \tan(-\theta) \Rightarrow \alpha = -\theta + 2k\pi$. Então, a soma $\alpha + \theta$ é igual a uma quantidade inteira de voltas $\Rightarrow \boxed{\alpha + \theta = 2k\pi}$.

5. $\sqrt{3}+i = 1\cdot\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ$
$(\sqrt{3}+i)^{-12} = (2\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ)^{-12} = 2^{-12}\cdot\cos(-12\times 30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(-12\times 30^\circ) =$
$\frac{1}{4096}\cdot\cos(-360^\circ + i\,\mathrm{sen}(-300^\circ) = \frac{1}{4096}\cdot\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ = \boxed{\dfrac{1}{4096}}$

6. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} = \cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ + \mathrm{sen}\,30^\circ$
$1 + z + z^2 + \cdots + z^{50} = \frac{z^{51}-1}{z-1}$ (soma dos termos de uma P.G.)
$z^{51} = 1^{51}\cdot\cos(51\times 30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(51\times 30^\circ) = 1\cdot\cos 1530^\circ + i$

10. $i = 1\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°$

$$\sqrt[3]{i} = \begin{array}{r} 1\cos 30° + i\,\text{sen}\,30° \\ \downarrow +120° \\ 1\cos 150° + i\,\text{sen}\,150° \\ \downarrow +120° \\ 1\cos 270° + i\,\text{sen}\,270° \end{array}$$

$1\cos 30° + i\,\text{sen}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
$1\cos 150° + i\,\text{sen}\,150° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
$1\cos 270° + i\,\text{sen}\,270° = -i$

$$\boxed{\text{Resposta:} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,, -i}$$

11. $-16 = 16[\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°]$

$$\sqrt[4]{16[\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°]} = \begin{array}{r} 2\cos 45° + i\,\text{sen}\,45° \\ \downarrow +90° \\ 2\cos 135° + i\,\text{sen}\,135° \\ \downarrow +90° \\ 2\cos 225° + i\,\text{sen}\,225° \\ \downarrow +90° \\ 2\cos 315° + i\,\text{sen}\,315° \end{array}$$

$2\cos 45° + i\,\text{sen}\,45° = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
$2\cos 135° + i\,\text{sen}\,135° = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
$2\cos 225° + i\,\text{sen}\,225° = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
$2\cos 315° + i\,\text{sen}\,315° = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$$\boxed{\text{Resposta:} \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

12. $z^3 = \bar{z}$

$z = \rho \cdot [\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$
$\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) = \rho(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = \rho \cdot [\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]$
$z^3 = \rho^3 \cdot [\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta$
$\rho^3[\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta] = \rho[\cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta]$
$\ell^3 = \ell \to \rho = 0 \text{ ou } \rho = 1$
$\rho = 0 \to z = 0$
$\rho = 1 \to 3\theta = -\theta + 2k\pi \to 4\theta = 2k\pi \to \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$z_1 = 0 \quad z_2 = 1[\cos\theta + i\,\text{sen}\,te] = 1 \quad 1[\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}] = i \quad 1[\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}] = -i$

$\boxed{\text{Resposta:}0,\ 1,\ i,\ -1,\ -i}$

13. Seja $z = 7 + i\sqrt{15}$

$|z|^2 = 49 + 15 = 64 \rightarrow |z| = 8$

$|\sqrt[3]{z}| = \sqrt[3]{|z|} = \boxed{2}$

14. $z = a + 3i$, $a \in \mathbb{R}$. Seja θ o argumento de z.

$\tan\theta = \frac{3}{a}$

Se $\theta = \frac{\pi}{6}$, então $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{a} \rightarrow \boxed{a = 3\sqrt{3}}$

15. Seja $z = a + bi$, então $1 - z = (1 - a) = (1 - a) - bi$ e $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|1 - z| = \sqrt{(1 - a)^2 + (-b)^2}$

$|1/z| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2 + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1 - a)^2 + b^2} \rightarrow a^2 = (1 - a)^2$

$a = 1 - a \rightarrow a = 1/2$

ou

$a = -1 + a \rightarrow$ impossível

$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + b^2 = 1 \rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

16. Vamos pensar em $|z + 1 + i| = |z - (-1 - 1)| = 1$.

Ou seja, queremos todos os complexos z tais que a sua distância ao número fixo $-1 - i$ vale 1.

FIGURA

O conjunto de todos os valores que podemos atribuir a z forma uma circunferência de raio 1 centrada em $-1 - i$.

Queremos o de módulo máximo, ou seja, aquele que está mais distante da origem.

Trace uma reta que passa pela origem e pelo centro da circunferência. Essa reta intersecta a circunferência em dois pontos: o mais próximo da origem e o mais distante da mesma. Essa reta é $y = x$, onde x e y são reais. Assim,

$\sqrt{2(x + 1)^2} = 1 \rightarrow (x + 1)\sqrt{2} = 1 \rightarrow x + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

ou

$$-(x + 1) \cdot \sqrt{2} = 1 \rightarrow -x - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

logo o complexo de módulo máximo é $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}$

17. Como no problema anterior, $|z-2|=1$ é uma circunferência de raio 1 centrada em $2+a$. A seguir, trace a reta que passa pelo centro da circunferência e por $-i$.

FIGURA

Essa reta é $y=\frac{1}{2}x=1$. Queremos o mínimo e o máximo de $|z-(-i)|$, ou seja, a distância mínima e a distância máxima de $-i$ à circunferência. Como a distância de $-i$ ao centro é $\sqrt{5}$ e o raio é 1, as distâncis procuradas são $\sqrt{5}-1$ e $\sqrt{5}+1$.

18. $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=\frac{|z+i|}{|z-i|}=\frac{\text{distância do complexo ao } -i}{\text{distância do complexo ao } i}$

Além disso, $|z|=3$, que corresponde a uma circunferência de raio 3 centrada na origem.

FIGURA

Devemos procurar o maior numerador com o menor denominado.

Logo, $z=3i$

Então, o máximo valor de $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=\left|\frac{3i+i}{3i-i}\right|=2$.

19. a) $|z|=1\leftrightarrow d(z;0)=1$

circunferência de centro 0 e raio 1

b) $|z+i|\leq 1\leftrightarrow d(z;-i)\leq 1$

semicircunferência de centro $-i$, isto é, $(0,-1)$ e raio 1.

c) $|z+i|=|1-z|\leftrightarrow d(z;-i)=d(z;1)$

mediatriz do segmento de extremos $-i$ e 1.

d) $|1+z|+|1-z|=4\leftrightarrow d(z;-1)+d(\ 1)=4$

elipse de focos -1 e 1 e eixo maior 4.

e) $|1+z|+|1-z|=2\leftrightarrow d(z;-1)+d(z;1)=2$

segmento de reta (fechado) de extremos -1 e 1.

f) se $z=x+yi$ (x,y reais),

$|1+z|=2|1-z|\leftrightarrow\sqrt{(1+x)^2+y^2}=2\sqrt{(1-x)^2+y^2}\leftrightarrow$

$3x^2+3y^2-10x+3=0\leftrightarrow$

$x^2-\frac{10}{3}x+y^2+1=0\leftrightarrow$

$\left(x-frac53\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$

circunferência de centro $(\frac{5}{3},0)$ e raio $\frac{4}{3}\cdot$

g) Se $z = x + yi$ $(x, y$ reais),

$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi}\ \frac{x+1-yi}{x+1-yi} =$

$= \frac{x^2-1+y^2+i[y(x+1)-y(x-1)]}{(x+1)^2+y^2}$ é imaginário puro se e só se

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $(x+1)^2 + y^2 \neq 0$.

Circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, exceto o ponto $(-1, 0)$.

20. Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixt - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

21. Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$|1 - z|^2 + |1 + z|^2 = |1 - x - yi|^2 + |1 + x + yi|^2 = (1 - x)^2 + y^2 + (1 + x)^2 + y^2 =$

$= 1 - 2x + x^2 + y^2 + 1 + 2x + x^2 + y^2 = 2(1 + x^2 + y^2) = 2(1 + |z|^2) = 2 + 2|z|^2$

$\boxed{\text{Resposta: D}}$

22. a) $z^2 + 2iz - 5 = 0$

$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = -4 + 20 = 16$

$z = \frac{-2i \pm 4}{2}$ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 2 - i \\ z_2 = -2 - i \end{array}}$

b) $z^3 + 1 = 0$

$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos 180°} + i \operatorname{sen} 180° =$

$1 \cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$

$= 1 \cos 180° + i \operatorname{sen} 180°$

$1 \cos 300° + i \operatorname{sen} 300°$

$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = -1 \\ z_3 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}}$

c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$\frac{z^4-1}{z-1} = 0$

As raízes são as raízes quartas da unidade, à exceção de $z = 1$.

$\boxed{\text{Respostas; } -1, 1, -i, i}$

d) $z^5 - z^4 + z^3 + z - 1 = 0$

$\frac{z^6-1}{z+1} = 0$.

As raízes são as raízes sextas de 1, à exceção de $z = -1$.

$\boxed{\text{Respostas: } 1, \omega \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$

e) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 1(-8) = 81$

$$z^3 = \frac{-7 \pm 9}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; z^3=1 \to z = \sqrt[3]{1\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ} \begin{cases} 1\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ \to z_1 = 1 \\ 1\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ \to z_2 = -1/2 + \sqrt{3}i/2 \\ 1\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ \to z_3 = -1/2 - \sqrt{3}i/2 \end{cases} \\ \searrow \; z^3=-8 \to z = \sqrt[3]{8\cos 1800^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ} \begin{cases} 2\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ \to z_4 = 1 + \sqrt{3}i \\ 2\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ \to z_5 = -2 \\ 2\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ \to z_6 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases} \end{array}$$

f) $z^n = (z-1)^n$, $n > 1$

$z \neq 0$. Então

$\frac{(z-1)^n}{z^n} = 1 \to \left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \to \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n = 1 \to 1 - \frac{1}{z} = \sqrt[n]{1} \to$

$1 - \frac{1}{2} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{z} \to z = \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n} - i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}$

como $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$ então $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2}$ e

como $\operatorname{sen} 2A = 2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \cos A$ então $\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} \cdot \cos\frac{k\pi}{n}$. Logo

$z = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2} - 1 i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2} \cdot \cos\frac{k\pi}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} + i\cos\frac{k\pi}{n}}{2 \cdot \operatorname{sen}\frac{kx}{n}} =$

$= \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cot\frac{k\pi}{n} \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1}$

g) $z \neq 1$, então $1 = \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \left(\frac{z-1+2}{z-1}\right)^n$

$1 + \frac{2}{z-1} = \sqrt[n]{1} \to 1 + \frac{2}{z-1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, k = \{0, 1, \ldots, n-1\} \to z = \frac{\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} + 1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} - 1}$

$z = \frac{[(\cos\frac{2k\pi}{n} + 1) + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}]}{[(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}]} \cdot \frac{[(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) - i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}]}{[(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) - i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}]} = \frac{2i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{m}}{2\cos\frac{2k\pi}{n} - 2} = \frac{i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{\cos\frac{2k\pi}{n} - 1}$

$z = \frac{2i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{m} \cdot \cos\frac{k\pi}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n} - \operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n} - 1} = \frac{2i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} \cdot \cos\frac{k\pi}{n}}{-2 \cdot \operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n}} = \boxed{-i \cdot \cot\frac{k\pi}{n}, \; k = 1, \ldots, n-1}$

h) $z = z^5$

$1 = z^4$ com $z = 0$ sendo uma das soluções.

$z = \sqrt[4]{1\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ} = 1\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ \to z = 1$

$1\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ \to z = i$

$1\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ \to z = -1$

$1\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ \to z = -i$

$\boxed{\text{Resposta: } 0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i}$

i) $z^3 = (\bar{z})^{-2}$

Seja $z = \rho \cdot \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Então $\rho^3 \cdot \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = (\rho \cdot \cos(-\theta) + i - \operatorname{sen}(-\theta))^{-1} \to$

$\rho^3 \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = \rho^{-1}\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$.

Então

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^{-2} \\ \text{e} \\ 3\pi = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \to \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \text{e} \\ \theta = 3k\pi \end{array}$$

Logo, $z = 1 \cos 0$ 1 D 0 3 4 T D 6

23. a) $|z+\omega| \leq |z|+|\omega| = 7$ e $|z+\omega| \geq \big|\,|z|+|\omega|\,\big| = 1.$ Resposta: $\boxed{1 \leq |z+\omega| \leq 7}$

b) $|z-\omega| = |z+(-\omega))| \leq |z|+|-\omega| = 3+4 = 7$ e
$|z-\omega| = |z+(-\omega)| \geq \big|\,|z|-|-\omega|\,\big| = |3-4| = 1$ Resposta: $\boxed{1 \leq |z-\omega| \leq 7}$

c) $|z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega| = 12.$ Resposta: $\boxed{|z \cdot \omega| = 12}$

d) $\left|\frac{z}{\omega}\right| = \frac{|z|}{|\omega|} = \frac{3}{4}$ Resposta: $\boxed{\left|\dfrac{z}{\omega}\right| = \dfrac{3}{4}}$

24. Sejam α o argumento de z e β o argumento de ω. Então $z = 3\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$

e $\omega = 4 \cdot \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$.

a) $|z+\omega| = 5$

$z+\omega = 3\cos\alpha + 3i\,\text{sen}\,\alpha + 4\cos\beta + 4\,\text{sen}\,\beta$
$|z+\omega| = \sqrt{(3\cos\alpha + 4\cos\beta)^2 + (3\,\text{sen}\,\alpha + 4\,\text{sen}\,\beta)^2} =$
$= \sqrt{9\cos^2\alpha + 24\cos\alpha\cdot\cos\beta + 16\cos^2\beta + 9\,\text{sen}^2\,\alpha + 24\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + 16\,\text{sen}^2\,\beta} =$
$= \sqrt{25 + 24(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta)} = 5.$

Então, $25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 25 \to \cos(\alpha-\beta) = 0 \to \boxed{\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

b) $|z+\omega| = 7$

Pelo mesmo argumento utilizado em a), $25 + 24\cos(\alpha-\beta) = 49 \to \cos(\alpha-\beta) = 1 \to$

$\to \boxed{\alpha - \beta = 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

c) $|z+\omega| = 1$

$25 + 24\cdot\cos(\alpha\cdot\beta) = 1 \to \cos(\alpha-\beta) = -1 \to \boxed{\alpha-\beta = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

d) $|z+\omega| = \sqrt{37}$

$25 + 24\cdot\cos(\alpha-\beta) = 37 \to \cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2} \to \boxed{\begin{array}{c}\alpha-\beta+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou}\\ \alpha-\beta = \frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}}$

25. Sejam $z = |z|[\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha]$ e $w = |w|[\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta]$.

a) $z\omega = |z|\cdot|\omega|\cdot[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$
Para que o produto seja um real, $\boxed{\alpha+\beta = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

b) $\frac{z}{\omega} = \frac{|z|}{|\omega|}\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)]$
Para que seja real, $\boxed{\alpha-\beta = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

c) $z\cdot\omega$ imaginário puro.
$\boxed{\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

d) $\frac{z}{\omega}$ imaginário puro.

$$\boxed{\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

26. Ao número fixo $\sqrt{3} + i$, está sendo somado um número variável (depende de θ).

FIGURA

O módulo de z será máximo quando 0, $\sqrt{3} + i$ e z forem colineares. Dessa forma:

$\tan 30^\circ = \frac{2\,\text{sen}\,\theta}{2\cos\theta} \to \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \theta = 30^\circ$

$z = 2\sqrt{3} + i \cdot 2 \to \boxed{\underset{\max}{|z|} = \sqrt{12+4} = 4}$

Outra solução:

$$\begin{aligned} z = (\sqrt{3} + 2\cos\theta) + i(1 + 2\,\text{sen}\,\theta) \to |z| &= \sqrt{(\sqrt{3} + 2\cos\theta)^2 + (1 + 2\,\text{sen}\,\theta)^2} \\ &= \sqrt{3 + 4\sqrt{3}\cos\theta + 4\cos^2\theta + i + 4\,\text{sen}\,\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta} \\ &= \sqrt{8 + 8\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}\,\theta\right)} \\ &= \sqrt{8 + 8\cdot\text{sen}(60^\circ + \theta)} \quad \text{Como o máximo valor de seno é 1.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underset{\max}{|z|} = \sqrt{12+4} = 4}$$

27. $\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^{\mathsf{n}} = 1 + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^{\mathsf{n}}$

$\left(1 - \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\mathsf{n}} = 1 + \cos\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3}$

$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^{\mathsf{n}} = 1 + \cos\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3}$

$\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 1 + \cos\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3}$

$$\begin{cases} \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 1 + \cos\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} & \text{(I)} \\ \text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

$\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 1 + \cos\,\frac{2\mathsf{n}\pi}{3} \to \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 1 + 2\cdot\cos^2\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} - 1 \to \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} =$

$$= 2\cdot\cos^2\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} \begin{cases} \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1º) se $\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 0$, então $\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \to \frac{\mathsf{n}}{3} + \frac{1}{2} + k \to n = \frac{3}{2} + 3k$ com k inteiro. Nesse caso, n não será inteiro. Logo esssa solução será descartada.

2º) se $\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \pm\,\frac{\pi}{3} + 2k\pi \to \frac{\mathsf{n}}{3} = \pm\,\frac{1}{3} + 2k \to n = \pm 1 + 6k$ com k inteiro.

$$\text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \text{sen}\,2n\,\frac{\pi}{3} \to \text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 2\,\text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3}\cdot\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} \begin{cases} \text{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1º) se sen $\frac{n\pi}{3} = 0$, então $\frac{n\pi}{3} = k\pi \to n = 3k$ com k inteiro.
2º) se cos $\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $n = \pm 1 + 6k$ com k inteiro.

As soluções que satisfazem simultaneamente a (I) e (II) são $\boxed{n = \pm 1 + 6k, \text{ com } k \text{ inteiro.}}$

28. $|z-2| = |z+4| \to$ lugar geométrico dos números complexos que equidistam de 2 e de -4, ou seja, a meidatriz do segmento que une $(2,0)$ e $(-4,0) \to x = -1$

FIGURA

$|z-3| + |z+3| = 0 \to$ elise de focos $(3,0)$ e $(-3,0)$ e eixo maior 10.

FIGURA

Resolvendo o sistema

FIGURA

$x = -1$
$\frac{(-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \to \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \to y^2 = \frac{24-25}{25} \to y = \pm\frac{8\sqrt{6}}{5}$

Soluções: $\boxed{-1 + \dfrac{8\sqrt{6}i}{5}\,;\ \text{e}\ -1 - \dfrac{8\sqrt{6}i}{5}}$

29. Como os coeficientes são reais, então, se $z = x + iy$ é raiz, $\bar{z} = x - iy$ também é.
Além disso, $x^2 + y^2 = 4$.
$r_1 = r$
$r_2 = x + iy$
$r_3 = x - iy$
$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \to r + x + iy + x - iy = 0 \to r + 2x = 0 \to r = -2x$
$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -5 \to rx + riy + rx - riy + x^2 + y^2 = -5 \to 2rx + 4 = -5 \to 2rx = -9$
Então, $2(-x)x = -9 \to 4x^2 = 9 \to x = \pm 3/2$ e $r = \pm 3$
Além disso, $r_1r_2r_3 = r(x^2+y^2) = -q \to \begin{cases} -3 \cdot 4 = -q \to q = 12 \\ 3 \cdot 4 = -q \to q = -12 \end{cases}$

Soluções: $\boxed{12 \text{ e } -12}$

30. Se ω é um complexo, então 2ω é o seu dobro e $5\omega i$ é o seu quíntuplo girado de $90°$, no sentido anti-horário.

FIGURA

$AO^2 = 25 \cdot |\omega|^2 + 4 \cdot |\omega|^2 = 29 \cdot |\omega|^2$
$AO = |\omega| \cdot \sqrt{29}$
$\cos AOB = \frac{2|\omega|}{|\omega| \cdot \sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

31. $\theta_{\text{final}} = 360°$

variação $= 360°$

$\theta_{\text{inicial}} = 0°$

32. $\theta_{\text{inicial}} = 0°$

variação $= 0°$

$\theta_{\text{final}} = 0°$

33. Como $\left|\frac{1}{\mathsf{z}}\right| = \frac{1}{|\mathsf{z}|}$ e $|z| > 1$, o complexo $\frac{1}{\mathsf{z}}$ tem módulo menor que 1, sendo, portanto, sua imagem interior ao círculounitário.

Além disso, se $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$,

$z^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{z}|}$ (caso $i\,\mathrm{sen}\,\theta$), ou seja, os argumentos de z e $\frac{1}{\mathsf{z}}$ são simétricos.

Resposta: t

34. a) $1 + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{\theta} =$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}[\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}]$

b) $1 - \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} - i\cdot 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} =$

$= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}[\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}] =$

$= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}[\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})]$.

35. Seja $z = a + bi$, a e b reais e $\omega = c + di$, c e d reais.

Observe que $z\bar{\omega} = (a + bi)(c - di) = ac - adi + bci + bd$ e

$\bar{z}\omega = (a - bi)(c + di) = ac + adi - bci + bd$

Logo, $z\bar{\omega} + \bar{z}\omega = 2(ac + bd)$

Se imaginarmos z e ω como vetores, teremos $\vec{z} = (a, b)$ e $\vec{\omega} = (c, d)$.

Sabendo que $\vec{z}\cdot\vec{\omega} = |\vec{z}|\cdot|\vec{\omega}|\cdot\cos\theta$, então $ac + bd = |z|\,|\omega|\cdot\cos\theta \rightarrow$

$\frac{\mathsf{z}\bar{\omega}+\bar{\mathsf{z}}\omega}{2} = |z|\,|\omega|\cdot\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\mathsf{z}\bar{\omega}+\bar{\mathsf{z}}\omega}{2\cdot|\mathsf{z}|\cdot|\omega|}$

36. $s - \omega = (\omega\cdot z)(\cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120°)$

$\rightarrow \frac{\mathsf{s}-\omega}{\mathsf{z}-\mathsf{s}} = \frac{\omega-\mathsf{z}}{\mathsf{s}-\omega}$

$z - s = (s - \omega)(\cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120°)$

FIGURA

$s^2 - 2s\omega + \omega^2 = z\omega - z^2 - s\omega + sz$

$z^2 + s^2 + \omega^2 = 2\omega + s\omega + sz$

37. $(z - p)(\cos\pm 60° + i\,\mathrm{sen}\,\pm 60°) = w - p$, onde p é o afixo do centro.

Resolvendo,

$p = \frac{\mathsf{z}(\cos\pm 60°+\mathsf{i}\,\mathrm{sen}\,\pm 60°)-\mathsf{w}}{\cos\pm 60°+\mathsf{i}\,\mathrm{sen}\,\mp 60°-1} = \frac{\mathsf{z}(\frac{1}{2}\pm\mathsf{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2})-\mathsf{w}}{-\frac{1}{2}\pm\mathsf{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$

38. $A=0$
$B=1$
$C=1+i$
$D=4$

FIGURA

a) $f(z)=2z$
$f(A)=0$
$f(B)=2$
$f(C)=2+2i$
$f(D)=2i$

FIGURA

b) $f(z)=\bar{z}$
$f(A)=0$
$f(B)=1$
$f(C)=1-i$
$f(D)=-i$

FIGURA

c) $f(z)=iz$
$f(A)=0$
$f(B)=i$
$f(C)=-1+i$
$f(D)=-1$

FIGURA

d) $f(z)=i\bar{z}$
$f(A)=0$
$f(B)=i$
$f(C)=1+i$

FIGURA

e) $f(z)=-z$
$f(A)=0$
$f(B)=-1$
$f(C)=-1-i$
$f(D)=-i$

FIGURA

f) $f(z)=(1+i)z$
$f(A)=0$
$f(B)=1+i$
$f(C)=2i$

$f(D) = -1 + i$

FIGURA

g) $f(z) = z + 1 - i$
$f(A) = 1 - i$
$f(B) = 2 - i$
$f(C) = 2$
$f(D) = 1$

FIGURA

h) $f(z) = 2z + i$
$f(A) = i$
$f(B) = 2 + i$
$f(C) = 2 + 3i$
$f(D) = 3i$

FIGURA

i) $f(z) = (1 - i)z + 2 + i$
$f(A) = 2 + i$
$f(B) = 3$
$f(C) = 4 + i$
$f(D) = 3 + 2i$

FIGURA

39. a) f é uma homotetia de razão 2. A imagem é uma circunferência de centro $(2, 4)$ e raio 6.

b) f é uma simetria em relação ao eixo real. A imagem é uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 3.

c) f é uma rotação de $90°$ em torno da origem. A imagem é uma circunferência de centro $(-2, 1)$ e raio 3.

d) f é uma simetria em relação ao eixo real seguida de uma rotação de $90°$ em torno da origem. A imagem é uma circunferência de centro $(3, 1)$ e raio 3.

e) f é uma simetria em relação à origem. A imagem é uma circunferência de centro $(-1, -2)$ e raio 3.

f) $f(z) = (1 + i)z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)z$ é uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem seguida de uma homotetia de razão $\sqrt{2}$. A imagem é uma circunferência de centro $(1 + i) \cdot (1 + 2i) = -1 + 3i$, ou seja, $(-1, 3)$ e raio $3\sqrt{2}$.

g) f é uma translação. A imagem é uma circunferência de centro $1 + 2i + 1 - i = 2 + i$, ou seja, $(2, 1)$ e raio 3.

h) f é uma homotetia de razão 2 seguida de uma translação. A imagem é uma circunferência de centro $2(1 + 2i) + i = 2 + 5i$, isto é, $(2, 5)$ e raio 6.

i) $f(z) = (1 - i)z + (2 + i) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4}\right)z + 2 + i$ é uma rotação de $\frac{-\pi}{4}$ em torno da origem, seguida de uma homotetia de razão $\sqrt{2}$, seguida de uma translação. A imagem é uma circunferência de centro $(1 - i)(1 + 2i) + (2 + i) = 5 + 2i$, isto é, $(5, 2)$ e raio $3\sqrt{2}$.

40. $S_1 = 1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$

Esta é a soma dos termos de uma P.G. de termo inicial 1 e razão $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Logo,

$$S_1 = \frac{1\cdot[(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n - 1]}{(\cos\theta+\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)-1} = \frac{\cos \mathrm{n}\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\mathrm{n}\theta - 1}{\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta - 1} = \frac{1-2\operatorname{sen}^2\frac{n\theta}{2} + 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{n\theta}{2} - 1}{1-2\operatorname{sen}^2\frac{n\theta}{2} + 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - 1} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\cdot[-\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{n\theta}{2}]}{2\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\cdot[-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}]} = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{n\theta}{2}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \cdot \cos(\frac{\mathrm{n}\theta}{2} - \frac{\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\mathrm{n}\theta}{2} - \frac{\theta}{2}).$$

b) $S_2 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ é igual à parte real da solução acima (item a)).

$$S_2 = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \cdot \cos(\frac{\mathrm{n}\theta}{2} - \frac{\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\mathrm{n}\theta}{2} - \frac{\theta}{2})$$

c) $S_3 = 1 + \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \operatorname{sen} n\theta$ éigual à parte imaginária da solução do item a).

$$S_3 = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \cdot \operatorname{sen}(\frac{\mathrm{n}\theta}{2} - \frac{\theta}{2})$$

e) $f(z) = -z$

$f(c) = (-1, -2)$ $\quad f(P) = (-1 - 5)$
$f(Q) = (-4, -2)$
$f(R) = (-11, 1)$
$f(S) = (2, -2)$

f) $f(z) = (1 + i)z$

$f(c) = -1, +3i$ $\quad f(P) = -4 + 6i$ $\quad c' = (-1, 3)$ $\quad P' = (-4, 6)$
$f(Q) = 2 + 6I$ $\quad Q' = (2, 6)$
$f(R) = 2$ $\quad R' = (2, 0)$
$f(S) = -4$ $\quad S' = (-4, 0)$

g) $f(z) = z + 1 - i$

$f(c) = 2 + i$ $\quad f(P) = 2 + 4i$ $\quad c' = (2, 1)$ $\quad P' = (2, 4)$
$f(Q) = 2 + 6i$ $\quad Q' = (2, 6)$
$f(R) = 2 - 2i$ $\quad R' = (2, -2)$
$f(S) = -1 + i$ $\quad S' = (-1, 1)$

h) $f(z) = 2z + i$

$f(c) = 2 + 5i$ $\quad f(P) = 2 + 11i$ $\quad c' = (2, 5)$ $\quad P' = (2, 11)$
$f(Q) = 8 + 5i$ $\quad Q' = (8, 5)$
$f(R) = 2 - i$ $\quad R' = (2, -1)$
$f(S) = -4 + 5i$ $\quad S' = (-4, 5)$

i) $f(z) = (1 - i)z + 2 + i$

$f(c) = 5 + 2i$ $\quad f(P) = 8 + 5i$ $\quad c' = (5, 2)$ $\quad P' = (0, 5)$
$f(Q) = 8 - i$ $\quad Q' = (8, -1)$
$f(R) = 2 - i$ $\quad R' = (2, -1)$
$f(S) = 2 + 5i$ $\quad S' = (2, 5)$

Capítulo 5

Página 166

1. a) $\frac{(1+2i)^2}{3+4i} = \frac{1+4i+4i^2}{3+4i} = \frac{1+4i-4}{3+4i} = \frac{-3+4i}{3+4i} =$

$= \frac{-3+4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{-(3-4i)^3)}{9-16i^2} = \frac{-(9-24i+16i^2)}{9+16} +$

$= \frac{-9+24i+16}{25} = \frac{7+24i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{24}{25} i.$

b) $(1-i)^{12} = [(1-i)^2]^6 = (1-2i+i^2)^6 = (1-2i-1)^6 =$

$= (-2i)^6 = [(-2i)^2]^3 = (4i^2)^3 = (-4)^3 = -64.$

c) i^{-3333}. Divida 3333 por 4. $\begin{array}{r|l} 3333 & \underline{4} \\ 1 & 333 \end{array}$

Então $i^{-3333} = i^{-1} = i^3 = \boxed{-i}$

d) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{1789}$

Cada quatro potências consecutivas somam zero.

$\underbrace{1+i+i^2+i^3}_{\text{zero}} + \underbrace{i^4+i^5+i^6+i^7}_{\text{zero}} + \cdots + \underbrace{i^{1784}+i^{1785}+i^{1786}+i^{1787}}_{\text{zero}} + i^{1788} + i^{1789} = i^{1788} + i^{1789} =$

$= i^0 + i^1 = \boxed{1+i}$

2. a) $\frac{2+ai}{1-i} = \frac{(2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+ai+ai^2}{1-i^2} = \frac{2+i(2+a)-a}{1+1} = \frac{2-a}{2} + i \cdot \frac{(2+a)}{2}$

Para que seja real, $\frac{2+a}{2} = 0 \to a = -2.$

b) Para que seja imaginário puro, $\frac{2-a}{2} = 0 \to a = 2.$

3. $z^3 + z^2 + z = 0$

$z(z^2 + z + 1) = 0$

Uma das raízes é $z_1 = 0$.

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Então: $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ e $z_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

4. a) $\sqrt{-5-12i} = \sqrt{-5-\sqrt{144i^2}} = \sqrt{-5-\sqrt{-144}}$

Faça $A = -5$ e $B = -144$

Use o fato de que $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

$\sqrt{-5-\sqrt{-144}} = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{169}}{2}} - \sqrt{\frac{-5-\sqrt{169}}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{13-5}{2}} - \sqrt{\frac{-5-13}{2}}\right) = \pm(2 - \sqrt{-9}) =$

$= \pm\boxed{2-3i}$

b) $\sqrt{i} = \sqrt{0 + \sqrt{-1}} = \pm\left(\sqrt{\frac{0+\sqrt{0^2-(-1)}}{2}} = \sqrt{\frac{0-\sqrt{0^2-(-1)}}{2}}\right) =$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$

5. $z^2 = \bar{z}$. Seja $z = a + bi$, com a e b reais.

$(a + bi)^2 \cdot (a - bi)$

$a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a - bi \to a^2 - b^2 + 2abi = a - bi \to \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

i) se $b \neq 0$, então $2a = -1 \to a = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \to b^2 = \frac{3}{4} \to b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) se $b = 0$, então $a^2 = a \to a = 0$ ou $a = 1$.

Respostas: $\boxed{-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\ -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 1 \text{ e } 0}$

6. a) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$(x + iy)(x - iy) = 1 \to x^2 - i^2 y^2 = 1 \to x^2 + y^2 = 1$

$\boxed{\text{circunferência centrada na origem e com raio 1}}$

b) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$(x + iy)^2 = x^2 + 2yi + i^2 y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ é imaginário puro.

Então $x^2 - y^2 = 0 \to x^2 - y^2 \to x = \pm y$

$\boxed{\text{duas retas concorrentes na origem. Essas retas bissectam os quadrantes}}$

c) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$\mathrm{Re}(z) > 1 \to \boxed{\text{semi-plano } x > 1}$

d) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$x + iy = x - iy \to 2iy = 0 \to y = 0 \to \boxed{\text{reta real (eixo horizontal no plano de Argand-Gauss}}$

e) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$(x+iy)(x-iy)+x+iy+x-iy = 0 \to x^2+y^2+2x = 0 \to (x+1)^2-1+y^2 = 0 \to (x+1)^2+y^2 = 1$

$\boxed{\text{circunferência de raio 1 e centro em } (-1, 0)}$

f) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$x + iy + \frac{1}{\mathsf{x+iy}} = x + iy + \frac{\mathsf{1(x-iy)}}{\mathsf{(x+iy)(x-iy)}} = x + iy + \frac{\mathsf{x-iy}}{\mathsf{x^2+y^2}} = x + \frac{\mathsf{x}}{\mathsf{x^2+y^2}} + i\left(y - \frac{\mathsf{y}}{\mathsf{x^2+y^2}}\right)$ é real $\to$

$y = \frac{\mathsf{y}}{\mathsf{x^2+y^2}} = 0 \to y = \frac{\mathsf{y}}{\mathsf{x^2+y^2}}$

i) se $y = 0$, x é qualquer não nulo. $\to z =$ real não nulo

ii) se $y \neq 0$, $x^2 + y^2 = 1$

$\boxed{\text{circunferência de raio 1 e centro em } (0, 0) \text{ união com o eixo real, exceto } z = 0}$

g) Seja $z = x + iy$, com x e y reais.

$z + 1 = (x+1) + iy$ e $z - 1 = (x-1) + iy$

$\frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy} = \frac{[(x+1)+iy][(x-1)-iy]}{[(x-1)+iy][(x-1)-iy]} = \frac{x^2-1-y(x+1)i+y(x-1)i+y^2}{(x-1)^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2-1)-yi(x+1-x+1)}{(x-1)^2+y^2}$

$\mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1}) = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 1 \to x^2 + y^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \to x = 1$

$\boxed{\text{reta vertical } x = 1\text{, exceto } z = 1}$

7. $z = t + i\sqrt{1-t^2} = x + iy$

Então $x = t$ e $y = \sqrt{1-t^2}$. Observe que $y^2 = 1 - t^2 = 1 - x^2$ e $y \geq 0 \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \text{e} \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{semi-circunferência de raio 1 e centro na origem}}$

8. Sejam x e y reais.

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$ FIGURA $\boxed{\text{um retângulo}}$

$-z = -x - iy$

$-\bar{z} = -x + iy$

9.

$$\begin{cases} (1-i)\bar{z} + i\omega = i \\ 2z + (1+i)\bar{\omega} = 0 \end{cases}$$

Se $2z + (1+i)\bar{\omega} = 0$, então seu conjugado também é nulo.

Assim $2\bar{z} + (1-i)\omega = 0$.

Ficamos com

$$\begin{cases} (1-i)\bar{z} + i\omega = i \\ 2\bar{z} + (1-i)\omega = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2(1-i)\bar{z} + 2i\omega = 2i \\ 2(1-i)\bar{z} + (1-i)^2\omega = 0 \end{cases} \to 2i\omega - (1-i)^2\omega = 2i \to$$

$$\to 2i\omega - (1 - 2i - 1)\omega = 2i \to 2i\omega + 2i\omega = 2i \to \boxed{\omega = \frac{1}{2}}$$

Então $2z + (1+i) \cdot \frac{1}{2} = 0 \to 2z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \to \boxed{z = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}}$

10. $z + \frac{1}{z} = 1$

$z^2 + 1 = z$

$z^2 - z + 1 = 0$

$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. a) $a = p^2 + q^2$

$b = r^2 + s^2$

$ab = (p^2+q^2)(r^2+s^2) = (p+iq)(p-iq)(r+is)(r-is) =$

$= (pr + ips + iqr + i^2qs)(pr - ips - iqr + i^2qs) =$

$= [(pr - qs) + i(ps + qr)][(pr - qs) - i(ps + qr)] =$
$= (pr - qs)^2 - i^2(ps + qr)^2 = (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2$

b) $p = 5 \quad q = 6 \quad r = 7 \quad s = 10$

$(5^2 + 6^2)(7^2 + 10^2) = (5 \cdot 7 - 6 \cdot 10)^2 + (5 \cdot 10 + 6 \cdot 7)^2 = 25^2 + 92^2$

Observação: Há outra solução, $95^2 + 8^2$

12. Se os coeficientes são reais, então $1 + 3i$ também é raiz.
Se o polinômio é de 2º grau, então podemos escrevê-lo como
$[x - (1 + 3i)] \cdot [x - (1 - 3i)] = x^2 - (1 - 3i)x - (1 + 3i)x + (1 - 9i^2) = \boxed{x^2 - 2x + 10}$
Observação: Há outras soluções, mútliplas reais de $x^2 - 2x + 10$.

13. $z^2 + (a + i)z + 2 - 3i = 0$
Seja $z = x + 0i$ uma raiz real do polinômio dado.
$x^2 + (a + i)x + 2 - 3i = (x^2 + ax + 2) + i(x - 3) = 0$
Então $x - 3 = 0 \to x = 3$ e
$x^2 + ax + 2 = 0 \to 9 + 3a + 2 = 0 \to \boxed{a = -11/3}$

14. a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}}$

b) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}} = \boxed{2 + \sqrt{3}}$

15. Se $P(z)$ é um polinômio de coeficientes reais, então $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.
Assim, se $z = 1 - 2i$, então $P(\bar{z}) = P(1 + 2i) = \overline{2 + 3i} = \boxed{2 - 3i}$

16. $z_1 = 1 + 3i$ é raiz. Então, como os coeficientes são reais, $z_2 = 1 - 3i$ é raiz. Pela paridade de $x^4 + bx^2 + c$, se x é raiz, $-x$ também é. Logo, $\boxed{z_3 = -1 + 3i \text{ e } z_4 = -1 - 3i}$

17. $i^{-1} = \frac{1}{\mathsf{i}} = \frac{\mathsf{i}}{\mathsf{i}^2} = -i$
$i^{\mathsf{n}} + i^{-\mathsf{n}} = i^{\mathsf{n}} + (i^{-1})^{\mathsf{n}} = i^{\mathsf{n}} + (-i)^{\mathsf{n}} = i^{\mathsf{n}} + (-1)^{\mathsf{n}} \cdot i^{\mathsf{n}}$
Se n for par, a expressão vale $2i^{\mathsf{n}}$, que pode ser 2 ou -2.
Se n for ímpar, a expressão vale zero.

Resposta: três.

18. $1 + i + i^2 + \cdots + i^{\mathsf{n}} = \frac{\mathsf{i}^{n+1}-1}{\mathsf{n}-1}$ (soma dos termos de uma P.G.)

i) Se $n = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$
$i^{\mathsf{n}+1} = i$ e a expressão valerá $\frac{\mathsf{i}-1}{\mathsf{i}-1} = 1$.

ii) Se $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$
$i^{\mathsf{n}+1} = -1$ e a expressão valerá
$\frac{-1-1}{\mathsf{i}-1} = \frac{-2}{\mathsf{i}-1} = \frac{-2\cdot(-1-\mathsf{i})}{(-1+\mathsf{i})\cdot(-1-\mathsf{i})} = \frac{2+2\mathsf{i}}{1-\mathsf{i}^2} = \frac{1(1+\mathsf{i})}{2} = 1 + i$

iii) se $n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{Z}$

$i^{\mathsf{n}+1} = -i$ e a expressão valerá $\frac{-\mathsf{i}-1}{\mathsf{i}-1} = \frac{-(\mathsf{i}+1)\cdot(-1-\mathsf{i})}{(-1+\mathsf{i})\cdot(-1-\mathsf{i})} = \frac{(\mathsf{i}+1)(1+\mathsf{i})}{2} = \frac{2\mathsf{i}}{2} = i$

iv) se $n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$

$i^{\mathsf{n}+1} = 1$ e a expressão valerá $\frac{1-1}{\mathsf{i}-1} = 0$.

20. a) $+2\bar{z} = 6 + i$

$(a + bi) + 2 \cdot (a - bi) = 6 + i$

$a + 2a + bi - 2bi = 6 + i$

$3a - bi = 6 + i$

$a = 2$ e $b = -1$

$\boxed{z = 2 - i}$

b) $(1 + i)z + 3i\bar{z} = 2 + i$

$(1 + i)(a + bi) + 3i(a - bi) = 2 + i$

$a + bu + ai - b + 3ai + 3b = 2 + i$

$a + 2b + i(b + 4a) = 2 + i$

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1$$

$\boxed{z = 2 - i}$

Capítulo 5

Página 188

1. Seja z um complexo não-nulo.

Seja w uma raiz n-ésima de z, $w^{\mathsf{n}} = z$, $w \neq 0$.

Sejam $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mathsf{n}-1}$ as raízes n-ésimas da unidade.

$w\,\varepsilon_1, w\,\varepsilon_1, \ldots, w\,\varepsilon_{\mathsf{n}-1}$ são n complexos distintos (pois $w \neq 0$ e as raízes n-ésimas da unidade são distints) e $(w\,\varepsilon_{\mathsf{k}})^{\mathsf{n}} = w^{\mathsf{n}}(\varepsilon_{\mathsf{k}})^{\mathsf{n}} = z \cdot 1 = z$, ou seja, $w\,\varepsilon_1, w\,\varepsilon_1, \ldots, w\,\varepsilon_{\mathsf{n}-1}$ são as n raízes n-ésimas de z.

2. Sejam $\varepsilon_{\mathsf{k}} = \cos\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ as raízes n-ésimas da unidade.

$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{\mathsf{n}-1} = 1 + \varepsilon_1 + (\varepsilon_1)^2 + \cdots + (\varepsilon_1)^{\mathsf{n}-1} = 1 \cdot \frac{(\varepsilon_1)^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = 1 \cdot \frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$

3. Seja $\varepsilon_{\mathsf{k}} = \cos\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ as raízes n-ésimas da unidade. Observemos que $\varepsilon_{\mathsf{k}} = \varepsilon_1^{\mathsf{k}}$. Temos

$\varepsilon_0^{\mathsf{p}} + \varepsilon_1^{\mathsf{p}} + \varepsilon_2^{\mathsf{p}} + \cdots + \varepsilon_{\mathsf{n}-1}^{\mathsf{p}} = 1 + \varepsilon_1^{\mathsf{p}} + (\varepsilon_1)^{2\mathsf{p}} + \cdots + (\varepsilon_1)^{(\mathsf{x}-1)\mathsf{p}} = 1 \cdot \frac{1-(\varepsilon_1^p)^n}{1-\varepsilon_1^p} = 0,$

pois $\varepsilon_1^{\mathsf{p}} \neq 1$ (p não é múltiplo de n) e $(\varepsilon_1^{\mathsf{p}})^{\mathsf{n}} = (\varepsilon_1^{\mathsf{n}})^{\mathsf{p}} = 1^{\mathsf{p}} = 1$.

4. Não possuem inverso aqueles que não são relativamente primos com 12.

Resposta: $\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

5. Todos os que não são relativamente prmos com n.

6. a) $7 + 9 = 16 \equiv 3$

b) $7 \times 9 = 63 \equiv 11$

c) $9 \times 11 = 66 \equiv 1$. Logo 6 é o inverso de 11.

d) $3 - 7 = -4 \equiv 9$

e) $2 + 3 = 5$.

7. a) $\varepsilon_{21} \cdot \varepsilon_{19} = \cos[21 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] + i\,\mathrm{sen}[21 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] \cdot \cos[19 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] + i\,\mathrm{sen}[19 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] = \cos[40 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] + i\,\mathrm{sen}[40 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] =$
$= \cos[6 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] + i\,\mathrm{sen}[6 \cdot \frac{2\mathsf{k}\pi}{34}] = \varepsilon_6$

Basta usar a aritmética modular: $21 + 19 = 40 \equiv 6 \pmod{34}$

b) $(\varepsilon_{12})^{13} = \varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{12} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20}$ pois $12 + 12 + \cdots + 12 = 12 \times 13 = 156 \equiv 20 \pmod{34}$

c) $\varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{22} = \varepsilon_{34} = 1$. Logo $(\varepsilon_{12})^{-1} = \varepsilon_{22}$

d) $\varepsilon_4 : \varepsilon_{25} = \varepsilon_{-21} = \varepsilon_{13}$

8. Basta que k seja relativamente primo em $15 \to k = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.

Resposta: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$

9. Precisamos contar quantos s˜

$\phi(100) = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$
Resposta: 40

10. Este problema é equivalente ao problema 2.

11. a) Se $d =$ MDC$[p, q]$, existem inteiros positivos a e b tais que $p = ad$ e $q = bd$.

Se $z^{\mathsf{d}} = 1$, então $z^{\mathsf{p}} = z^{\mathsf{ad}} = (z^{\mathsf{d}})^{\mathsf{a}} = 1^{\mathsf{a}} = 1$ e $z^{\mathsf{q}} = z^{\mathsf{bd}} = (z^{\mathsf{d}})b = 1^{\mathsf{b}} = 1$, ou seja, se $z \in Ad$, então $z \in Ap$ e $z \in Aq$, isto é, $Ad \subset Ap \cap Aq$.

b) Se $d =$ MDC$[p, q]$, existem inteiros s e t tais que $d = sp + tq$ (Teorema de Bézout).

Se $z^{\mathsf{p}} = 1$ e $z^{\mathsf{q}} = 1$, então $z^{\mathsf{d}} = z^{\mathsf{sp+tq}} = (z^{\mathsf{p}})^{\mathsf{s}} \cdot (z^{\mathsf{q}})^{\mathsf{t}} = 1^{\mathsf{s}} \cdot 1^{\mathsf{t}} = 1$, ou seja, se $z \in Ap$ e $z \in Aq$, então $z \in Ad$, isto é, $Ap \cap Aq \subset Ad$.

c) Se $AD \subset Ap \cap Aq$ e $Ap \cap A_{\mathsf{q}} \subset Ad$, temos $Ab \cap Aq = Ad$.

12. a) Se uma raiz n-ésima da unidade é também raiz p-ésima da unidade para algum $p < n$, suas potências são também raízes p-ésimas da unidade. Logo, essas potências poderão ter, no máximo, p valores distintos, não podendo, portanto, gerar todas as n raízes n-ésimas da unidade; ou seja, ela não é raiz n-ésima primitiva da unidade.

b) Se uma raiz n-ésima da unidade, $\varepsilon_{\mathsf{k}} = \cos\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}} + i \operatorname{sen}\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, não é primitiva, k não é relativamente primo com n. Logo, existem k_1 e $p < n$ tais que
$\frac{\mathsf{k}}{\mathsf{n}} = \frac{\mathsf{k_1}}{\mathsf{p}}$ e $\varepsilon_{\mathsf{k}} = \cos\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}} + i \operatorname{sen}\frac{2\mathsf{k}\pi}{\mathsf{n}} = \cos\frac{2\mathsf{k_1}\pi}{\mathsf{p}} + i \operatorname{sen}\frac{3\mathsf{k_1}\pi}{\mathsf{p}}$
é raiz p-ésima da unidade, com $p < n$.

13. a) $1 + 1)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}1 + c_{\mathsf{n}}^2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}$
$c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}} = 2^{\mathsf{n}}$

b) $(1 - 1)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 - c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}} = 0$

c,d)
Somando e subtraindo os resultados de a) e b),

$$\begin{cases} 1[c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^2 + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}} + \cdots] - 2^{\mathsf{n}} \\ 1[c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^3 + c_{\mathsf{n}}^5 + \cdots] = 2^{\mathsf{n}} \end{cases}$$

Daí, $c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^2 + c_{\mathsf{n}}^4 + \cdots = c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^3 + c_{\mathsf{n}}^5 + \cdots = \frac{1^n}{2} = 2^{\mathsf{n}-1}$

e,f,g)
Sejam $\varepsilon_0 = \cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3} = 1$
$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e
$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
as raízes cúbicas da unidade.
Sejam
$s_0 = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^3 + c_{\mathsf{n}}^6 + \cdots,$
$s_1 = c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^4 + c_{\mathsf{n}}^7 + \cdots,$ e
$s_2 = c_{\mathsf{n}}^2 + c_{\mathsf{n}}^5 + c_{\mathsf{n}}^8 + \cdots.$

$(1+\varepsilon_0)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_0^1 + c_{\mathsf{n}}^2\varepsilon_0^2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}\varepsilon_0^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^1 + c_{\mathsf{n}}^2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}$ já que $\varepsilon_0 = 1$
$(1+\varepsilon_0)^{\mathsf{n}} = c_0^0 + c_{\mathsf{n}}^1 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}} = s_0 + s_1 + s_2 = 2^{\mathsf{n}}$

$(1+\varepsilon_1)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_1^1 + c_{\mathsf{n}}^2\varepsilon_1^2 + c_{\mathsf{n}}^3\varepsilon_1^3 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}\varepsilon_1^{\mathsf{n}}$

No entanto,

$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^3 = \varepsilon_1^6 = \cdots = 1$
$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^4 = \varepsilon_1^7 = \cdots = \varepsilon_1$
$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^5 = \varepsilon_1^7 = \cdots = \varepsilon_2$

Então

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_1)^{\mathsf{n}} &= c_{\mathsf{n}.}^0 1 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_1 + c_{\mathsf{n}}^2\varepsilon_2 + c_{\mathsf{n}.}^3 1 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_1 + c_{\mathsf{n}}^5\varepsilon_2 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}\varepsilon_1^{\mathsf{n}}\\ &= s_0 + \varepsilon_1\cdot s_1 + \varepsilon_2\cdot s_2\end{aligned}$$

$(1+\varepsilon_2)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_2^1 + c_{\mathsf{n}}^2\varepsilon_2^2 + c_{\mathsf{n}}^3\varepsilon_2^3 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}\varepsilon_2^{\mathsf{n}}$

No entanto,

$\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^3 = \varepsilon_2^6 = \cdots = 1$
$\varepsilon_2^1 = \varepsilon_2^4 = \varepsilon_2^7 = \cdots = \varepsilon_2$
$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2^5 = \varepsilon_2^8 = \cdots = \varepsilon_1$

Então

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_2)^{\mathsf{n}} &= c_{\mathsf{n}.}^0 1 + c_{\mathsf{n}}^1\varepsilon_2 + c_{\mathsf{n}}^2\varepsilon_1 + c_{\mathsf{n}.}^3 1 + c_{\mathsf{n}}^4\varepsilon_2 + c_{\mathsf{n}}^5\varepsilon_1 + \cdots + c_{\mathsf{n}}^{\mathsf{n}}\varepsilon_2^{\mathsf{n}}\\ &= s_0 + \varepsilon_2\cdot s_1 + \varepsilon_1\cdot s_2\end{aligned}$$

Temos $\begin{cases}(1+\varepsilon_0)^{\mathsf{n}} = s_0 + s_1 + s_2\\ (1+\varepsilon_1)^{\mathsf{n}} = s_0 + \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 s_2\\ (1+\varepsilon_2)^{\mathsf{n}} = s_0 + \varepsilon_2 s_1 + \varepsilon_1 s_2\end{cases}$

ou seja, $\begin{cases}s_0 + s_1 + s_2 = 2^{\mathsf{n}}\\ s_0 + (-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 + (-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2})s_2 = (\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})^{\mathsf{n}}\\ s_0 + (-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 + (-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2})s_1 = (\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})^{\mathsf{n}}\end{cases}$

$$\begin{cases}s_0 + s_1 + s_2 = 2^{\mathsf{n}}\\ s_0 - \frac{1}{2}(s_1+s_2) + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(s_1 - s_2) = \cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}\end{cases}$$

Somando as 3 equações: $3\cdot s_0 = 2^{\mathsf{n}} + 2\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}\cdot$

Daí,

$c_{\mathsf{n}}^0 + c_{\mathsf{n}}^3 + c_{\mathsf{n}}^6 + \cdots = s_0 = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}\,\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}\cdot$ Além disso: subtrando a terceira equação da segunda:
$i\sqrt{3}(s_1 - s_2) = 2i\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} \to s_1 - s_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}$

Então:

$s_1 + s_2 = 2^{\mathsf{n}} - s_0 = 2^{\mathsf{n}} - \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}\,\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} = \frac{2}{3}\cdot 2^{\mathsf{n}} - \frac{2}{3}\,\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}$ e
$s_1 - s_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}$

$2s_1 = \frac{2}{3}\cdot 2^{\mathsf{n}} - \frac{2}{3}\cdot\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} \to s_1 = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}\cdot\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}$
$2s_2 = \frac{2}{3}\cdot 2^{\mathsf{n}} - \frac{2}{3}\cdot\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} \to s_2 = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}\cdot\cos\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathsf{n}\pi}{6}$

h) $(1+i)^{\mathsf{n}} = c_{\mathsf{n}}^0 + ic_{\mathsf{n}}^1 + i^2 c_{\mathsf{n}}^2 + c^3 c_{\mathsf{n}}^3 + i^4 c_{\mathsf{n}}^4 + \cdots$

$\sqrt{2}^{\mathsf{n}}(\cos\, \frac{\mathsf{n}\pi}{4} + i \operatorname{sen}\, \frac{\mathsf{n}\pi}{4}) = [c_{\mathsf{n}}^0 - c_{\mathsf{n}}^2 + c_{\mathsf{n}}^4 + \cdots] + i[c_{\mathsf{n}}^1 - c_{\mathsf{n}}^3 + c_{\mathsf{m}}^5 - \cdots]$

$c_{\mathsf{n}}^0 - c_{\mathsf{n}}^2 + c_{\mathsf{n}}^4 = \cdots = \ \mathrm{Re}[\sqrt{2}^{\mathsf{n}}(\cos\, \frac{\mathsf{m}\pi}{4} + i \operatorname{sen}\, \frac{\mathsf{n}\pi}{4} 0] = \sqrt{2}^{\mathsf{n}} \cos\, \frac{\mathsf{n}\pi}{4} \cdot$