Soluções dos Exercícios do Capítulo 6

1. O polinômio procurado $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deve satisfazer a identidade $P(x+1) = P(x) + x^2$, ou seja, $a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d = ax^3 + bx^2 + cx + d + x^2$, o que é equivalente a $(3a-1)x^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = 0$. Isto ocorre se e só se os coeficientes deste último polinômio são todos nulos, ou seja, se e só se $3a-1 = 0$, $3a+2b=0$ e $a+b+c=0$. Resolvendo o sistema formado por estas três equações encontramos $a = 1/3$, $b = -1/2$ e $c= 1/6$. Logo, $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ (onde d é arbitrário; podemos, por exemplo, tomar $d = 0$).

A identidade $P(x+1) = P(x) + x^2$ pode ser escrita na forma $x^2 = P(x+1) - P(x)$. Assim:

$$\begin{aligned}
1^2 &= \cancel{P(2)} - P(1)\\
2^2 &= \cancel{P(3)} - \cancel{P(2)}\\
&\dots\\
(n-1)^2 &= \cancel{P(n)} - \cancel{P(n-1)}\\
n^2 &= P(n+1) - \cancel{P(n)}
\end{aligned}$$

Somando as igualdades membro a membro e observando o cancelamento dos termos, obtemos:

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1) - P(1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

$\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$. Esta expressão pode ser fatorada e colocada na forma:

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Devemos ter

$$\frac{2x+1}{x^3-x} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x^3-x}$$

Logo, $2x+1 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$, o que ocorre se e só se $A+B+C = 0$, $B-C = 2$ e $-A = 1$. Resolvendo, encontramos $A = -1$, $B = 3/2$ e $C = -1/2$.

3. Existe um polinômio de grau menor ou igual a 2, da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, que satisfaz as três condições dadas. Os valores de a, b e c são tais que $-a + bi + c = -1$, $a+b+c = 2+i$, $c = 1$. Resolvendo, encontramos $a = 1$, $b = i$ e $c = 1$. Logo, o polinômio procurado é $P(x) = x^2 + ix + 1$.

4. P(x) é divisível por $x^2 - 3x + 2$ se e só se P(x) se anula nas raízes de $x^2 - 3x + 2 = 0$, ou seja, devemos ter $P(1) = P(2) = 0$. Portanto:

$4 + m + n = 0$

$20+ 2m + n = 0$

Resolvendo, encontramos $m = - 16$ e $n = 12$

Alternativamente, podemos efetuar a divisão:

$$
\begin{array}{llll|l}
x^3 & +3x^2 & +mx & +n & x^2-3x+2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +3x^2 & -2x & & x+6 \\
\cline{1-3}
& 6x^2 & +(m-2)x & +n & \\
& -6x^2 & +18x & -12 & \\
\cline{2-4}
& & (m+16)x & +(n-12) &
\end{array}
$$

P(x) é divisível por $x^2 - 3x + 2$ se e só se o resto da divisão é identicamente nulo, ou seja, $m+16 = 0$ e $n-12 = 0$, Assim, $m = -16$ e $n = 12$.

5. Denotando o quociente e o resto da divisão por Q(x) e R(x) , temos P(x) = Q(x) (x–3)(x+1) + R(x). Como o divisor é de grau 2, o resto R(x) é de grau menor ou igual a 1; portanto, é da forma R(x) = ax + b. Para encontrar a e b, basta, na identidade P(x) = Q(x) (x–3)(x+1) + ax + b, tomar x igual às raízes 3 e –1 do divisor. Para x =3, temos P(3) = a.3 + b; como P(3) é igual ao resto da divisão de P(x) por x–3, que é igual a 1, temos assim $\boxed{3a + b = 1}$. Para x =–1, temos P(–1) = a.(–1) + b; mas P(–1) é igual ao resto da divisão de P(x) por x+1, que é 4. Logo, $\boxed{-a + b = 4}$. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, encontramos a = –3/4 e b = 13/4. Portanto, o resto da divisão de P(x) por (x–3)(x+1) é R(x) = –3/4 x + 13/4.

6. Errado. Por exemplo, $P(x) = x^2 (x-1)$ é divisível por $p_1(x) = x^2$ e por $p_2(x) = x(x-1)$, mas não pelo produto $p_1(x)\, p_2(x) = x^3(x-1)$. A afirmativa seria verdadeira, no enquanto, sob a condição adicional de que p_1 e p_2 sejam primos entre si (ou seja, só admitam polinômios constantes como divisores comuns).

7. a) Suponhamos que m_1 e m_2 sejam mdcs de p_1 e p_2. Como m_1 é mdc de p_1 e p_2 e m_2 é um divisor comum, m_2 é divisor de m_1; logo, existe c_1 tal que $m_1 = c_1 m_2$. Mas o mesmo argumento é válido trocando os papéis de m_1 e m_2; assim, m_1 é divisor de m_2 e existe c_2 tal que $m_2 = c_2 m_1$. Logo, existem c_1 e c_2 tais que $m_1 = c_1 c_2 m_1$, ou seja, $m_1(c_1 c_2 - 1) = 0$. Portanto, $c_1 c_2$ é identicamente igual a 1, o que mostra que c_1 e c_2 são polinômios constantes não nulos $m_1 = c_1 m_2$. Logo, $m_1 = c_1 m_2$ para algum c_1 ? 0.

b) Suponhamos que p_2 seja um divisor de p_1; isto é, existe q tal que $p_1 = qp_2$. Se d é um divisor de p_2 (ou seja, $p_2 = sd$, para algum s), então d é também divisor de p_1 (já que $p_1 = qp_2 = qsd$). Logo, os divisores comuns a p_1 e p_2 são exatamente os divisores de p_2. Como p_2 divide p_1 e p_2 e todo divisor comum de p_1 e p_2 é divisor de p_2, concluímos que p_2 é mdc de p_1 e p_2.

c) Seja d um divisor comum de r e p_2; como $p_2 = qp_1 + r$,.d também é divisor de p_2. Por outro lado, se d é um divisor comum de p_1 e p_2, d é também divisor de r, já que $r = p_2 - qp_1$. Portanto, p_1 e p_2 têm os mesmos divisores comuns que r e p_2. Logo, mdc(p_1, p_2) = mdc (p_2, r).

d) Para n = 1, defina p_{n+2} como o resto da divisão de p_n por p_{n+1} . Pelo item anterior, mdc(p_1, p_2) = mdc (p_2, p_3) = mdc(p_3, p_4) = ... Por outro lado, como os polinômios p_n têm graus decrescentes, após um número finito de passos necessariamente encontramos um polinômio p_n identicamente nulo. Quando isto ocorre, p_{n-2} é múltiplo de p_{n-1} e, em conseqüência, o mdc de p_{n-2} e p_{n-1} (e portanto de p_1 e p_2) é p_{n-1}.

e) Seja $p_1(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $p_2(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$. O resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$ é $p_3(x) = -x^2 + 7x - 12$. O resto da divisão de $p_2(x)$ por $p_3(x)$ é 0 e, portanto, $p_3(x) = -x^2 + 7x - 12$ é um mdc de p_1 e p_2.

f) Se a é raiz comum a p e q então (x–a) é divisor comum de p e q. Logo, (x–a) é necessariamente um divisor de mdc(p, q), o que mostra que a é raiz de m = mdc(p, q). Por outro lado, m é divisor comum de p e q ou seja, existem s e t tais que p = ms e q = mt); logo, se a anula m, então a necessariamente anula p e q. Para encontrar as raízes comuns a $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $q(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ basta, portanto, encontrar as raízes de seu mdc $m(x) = -x^2 + 7x - 12$, que são 3 e 4.

g) Suponha que $p = q_1p_1 + q_2p_2$. Como m é divisor comum de p_1 e p_2, existem s_1 e s_2 tais que $p_1 = s_1m$ e $p_2 = s_2m$; logo, $p = m(q_1s_1 + q_2s_2)$, o que mostra que p é múltiplo de m.

Suponha agora que p seja múltiplo de m. Seja $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ a sequência obtida com o algoritmo de Euclides, com $p_n = m$ e $p_{n+1} = 0$. Denotemos, ainda, por q_i o resto da divisão de p_i por p_{i+1}. Ou seja:

$p_1 = q_1p_2 + p_3$
$p_2 = q_2p_3 + p_4$
...
$p_{n-3} = q_{n-3}p_{n-2} + p_{n-1}$
$p_{n-2} = q_{n-2}p_{n-1} + p_n$ (= m)
$p_{n-1} = q_{n-1}m$

Da penúltima equação, obtemos $m = p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-1}$, o que mostra que m pode ser expresso como uma combinação linear de p_{n-2} e p_{n-1}. Mas da equação anterior obtemos $p_{n-1} = p_{n-3} - q_{n-3}p_{n-2}$. Substituindo, obtemos:

$$m = p_{n-2} - q_{n-2}\,(p_{n-3} - q_{n-3}p_{n-2}) = (1-q_{n-2}q_{n-3})\,p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-3}.$$

Logo, m também pode ser expresso como combinação linear de p_{n-3} e p_{n-2}. O processo pode ser repetido com as equações anteriores, até expressar m como combinação linear de p_1 e p_2.

h) De modo análogo ao demonstrado no item anterior, existem inteiros m e n tais que am + bn = c se e só se c for múltiplo do mdc de a e b. Como 3 é múltiplo de mdc (75, 28) = 1, existem tais m e n (por exemplo, pode-se tomar m = 9 e n = 24).

8. a) Seja p(x) um polinômio de grau n. Dividindo p(x) por (x–a) podemos escrever $p(x) = q_1(x)\,(x-a) + b_0$. Dividindo agora q_1 por (x–a), podemos escrever $q_1(x) = q_2(x)(x-a) + b_1$ e, daí, $p(x) = q_2(x-a)^2 + b_1(x-a) + b_0$. Os graus dos quocientes q_i decrescem de uma unidade a cada passo e o processo pára quando $q_n(x)$ é constante e igual a b_n. Neste ponto, teremos obtido $p(x) = b_n(x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + b_1(x-a) + b_0$.

b) Dividindo sucessivamente $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ por $x-1$, temos:

	1	3	–4	–12
1	1	4	0	–12
1	1	5	5	
1	1	6		
1	1			

Logo, $p(x) = (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 5(x-1) - 12$

c) As raízes do polinômio $q(y) = y^3 + 6y^2 + 5y - 12$ são os valores de $(x-1)$ para os quais x é raiz do polinômio original. Ou seja, as raízes de q(y) são as raízes de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ diminuídas de uma unidade. Para obter a equação cujas raízes são as de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ aumentadas de uma unidade, basta expressar p(x) em termos das potências de $(x+1)$, através das divisões sucessivas por $x+1$.

	1	3	–4	–12
–1	1	2	–6	–6
–1	1	1	–7	
–1	1	0		
–1	1			

Logo, $p(x) = (x+1)^3 + 0(x+1)^2 - 7(x+1) - 6$ e a equação cujas raízes são as mesma do polinômio original aumentadas de uma unidade é $y^3 - 7y - 6 = 0$.

9. Se a é raiz de $p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ então $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0 = 0$. Ou seja, $a_0 = -a_n a^n - a_{n-1} a^{n-1} - ... - a_1 a = -(a_n a^{n-1} + a_n a^{n-2} + ... + a_1)a$, que é múltiplo de a. Para verificar se $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ tem raízes inteiras, basta testar se os divisores de 12 (ou seja, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$) são raízes. Verifica-se, assim, que –2, 2 e –3 são raízes de polinômio dado.

10. Se $a = p/q$ é raiz de $p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ então $a_n (p/q)^n + a_{n-1} (p/q)^{n-1} + ... + a_1 (p/q) + a_0 = 0$, ou seja $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Daí, $a_0 q^n = -(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1})p$, ou seja, $a_0 q^n$ é múltiplo de p. Como q e p são primos entre si, isto implica em que p seja divisor de a_0. Temos também $a_n p^n = -(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})q = 0$. Pelo mesmo argumento anterior, p é necessariamente divisor de a_n. As possíveis raízes racionais de $3x^3 - 2x^2 - 6 = 0$ são, portanto, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/3, \pm 2/3$. Verifica-se, porém, que nenhum destes valores anula o polinômio dado, que não possui, portanto, raízes racionais.

(Observação: na verdade, o polinômio desejado era $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9x - 6 = 0$; os candidatos a raízes racionais são os mesmos, mas neste caso $P(2/3) = 0$. Dividindo P(x) por $x - 2/3$ obtemos quociente $q(x) = 3x^2 - 9$. Portanto, as demais raízes da equação são as raízes de $3x^2 - 9 = 0$, ou seja, $x = \pm\sqrt{3}$.)

11. Não. Se o polinômio tiver raízes da forma p/q, com p e q primos entre si, então q deve ser um divisor de $a_n = 1$. Neste caso, $q = \pm 1$ e p/q é necessariamente inteiro.

12. a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{bc+ac+ab}{abc}=\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{-1}{-1}=1$

b) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = S_1^2 - 2S_2 = 0 - 2 . (-1)= 11$.

13. Para cada raiz x da equação original, seja y = 1/x. Então y deve satisfazer

$\left(\dfrac{1}{y}\right)^3 + 2\left(\dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{1}{y} - 3 = 0$, ou seja, $-3y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$.

14. Inicialmente, é conveniente estabelecer algumas propriedades básicas da derivada definida no exercício (naturalmente, estas propriedades são as mesmas da derivada definida no cálculo diferencial).

i) (linearidade) $(p+q)' = p' + q'$ e $(\alpha p)' = \alpha p'$.

ii) Se $p(x) = xq(x)$, então $p'(x) = xq'(x) + q(x)$ (De fato, se $q(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, então $p(x) = a_nx^{n+1} + a_{n-1}x^n + ... + a_1x^2 + a_0x$. Logo, $p'(x) = (n+1)a_nx^n + na_{n-1}x^{n-1} + ... + 2a_1x + a_0 = (na_nx^n + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x) + (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) = xq'(x) + q(x)$.

iii) Se $p(x) = (x-a)\, q(x)$, então $p'(x) = (x-a)q'(x) + q(x)$ (Como $p(x) = xq(x) - aq(x)$, temos $p'(x) = xq'(x) + q(x) - aq'(x) = (x-a)q'(x) + q(x)$.

iv) De modo geral, a derivada de $p(x)q(x)$ é $p'(x)q(x) + p'(x)q(x)$ [Pode-se, por exemplo, escrever $p(x) = xp_0(x) + c$ e utilizar indução no grau de p]

a) Se α é raiz simples de p(x) então $p(x)=(x-\alpha)q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha)=0$ e, como $p'(x)= q(x)+(x-\alpha)q'(x)$, temos $p'(\alpha)=q(\alpha) \neq 0$.
Reciprocamente, se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$, então $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ pois α é raiz de p(x) e, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x)+(x-\alpha)q'(x)= q(x)+(x-\alpha)q'(x)$, temos $q(\alpha) = p'(\alpha) \neq 0$ (portanto, α é raiz simples).

b) Se α é raiz dupla de p(x) então $p(x)=(x-\alpha)^2q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha)=(\alpha-\alpha)q(\alpha)=0$ e, como $p'(x)=[(x-\alpha)^2]'q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)= 2(x-\alpha)q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)$ e $p''(x) = 2q(x)+4(x-\alpha)q'(x)+ (x-\alpha)^2q''(x)$, $p'(\alpha)=0$ e $p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$. Reciprocamente, se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$, então $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ pois α é raiz de p(x) e, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x)+(x-\alpha)q'(x)= q(x)+(x-\alpha)q'(x)$, $q(\alpha) = p'(\alpha) = 0$; logo, α é raiz de q(x) e, portanto, q(x) é divisível por $(x-\alpha)$, o que garante a existência de um polinômio $q_1(x)$ tal que $q(x)=(x-\alpha)q_1(x)$. Então $p(x)=(x-\alpha)q(x) = (x-\alpha).(x-\alpha)q_1(x) = (x-\alpha)^2q_1(x)$; como $p'(x)=[(x-\alpha)^2]'q_1(x)+(x-\alpha)^2q_1'(x)= 2(x-\alpha)q_1(x)+(x-\alpha)^2q_1'(x)$ e $p''(x) = 2q_1(x)+4(x-\alpha)q_1'(x)+ (x-\alpha)^2q_1''(x)$, $p''(\alpha) = 2q(\alpha)$, $q(\alpha) = \dfrac{1}{2}p''(\alpha) \neq 0$.

c) O argumento do item anterior pode ser utilizado em uma prova por indução. A solução mais simples, no entanto, consiste em utilizar o resultado do exercício 16, segundo o qual $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dfrac{p''(a)(x-a)^2}{2} + ... + \dfrac{p^{(n)}(x-a)^n}{n!}$. Divididindo p(x) por

$(x-a)^k$ obtemos quociente q(x) = $\dfrac{p^{(k)}(a)}{k!} + \ldots + \dfrac{p^{(n-k)}(a)(x-a)^{n-k}}{n!}$ e resto r(x)

$= p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{p^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}$. Por outro lado, a é raiz de multiplicidade k, se e somente se $p(x) = (x-a)^k q(x)$, com $q(a) \neq 0$ (ou seja, $q(a) \neq 0$ e $r(x) \equiv 0$). Mas isto ocorre se e somente se $q(a) = \dfrac{p^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ (isto é, $p^{(k)}(a) \neq 0$) e cada um dos coeficientes de r(x) é nulo, isto é, $p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(k-1)}(a) = 0$.

15. Pelo exercício anterior, a é raiz de multiplicidade pelo menos k se e só se p e suas k–1 primeiras derivadas se anulam em a. Logo, a é raiz múltipla quando pelo menos p e p' se anulam em a. Para verificar se um polinômio possui raízes múltiplas basta, portanto, verificar se p e p' possuem alguma raiz comum, o que pode ser feito através do cálculo do mdc de p e p'. Para $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, temos $p'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 4$. Empregando o algoritmo de Euclides, determinamos que seu mdc é m(x) = x–2. Logo, 2 é a única raiz múltipla de p(x). Dividindo p(x) por (x–2) verificamos que $p(x) = (x-2)^2(x^2-1)$. Logo, suas raízes são 2 (dupla), 1 e –1.

16. Como visto no exercício 8, todo polinômio p(x) de grau n pode ser expresso em termos das potências de (x–a), na forma $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + b_n(x-a)^n$. Basta, agora, relacionar os coeficientes b_i com as derivadas de p no ponto a. Para isto, começamos por obsevar que a derivada de $(x-a)^n$ é $n(x-a)^{n-1}$. [Uma alternativa para demonstrar este fato é usar a expansão de $(x-a)^n$ em binômio de Newton; outra consiste em utilizar indução: é trivial verificar a expressão para n=1; supondo válido para n, seja $p(x) = (x-a)^{n+1} = (x-a)(x-a)^n$; logo $p'(x) = (x-a)n(x-a)^{n-1} + (x-a)^n = (n+1)(x-a)^{n+1}$.

Basta agora, tomar as derivadas sucessivas $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + b_n(x-a)^n$ e o seu valor no ponto a. Temos:

$p(a) = b_0$ (ou seja, $b_0 = p(a)$)

$p'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \ldots + (n-1)b_{n-1}(x-a)^{n-2} + nb_n(x-a)^{n-1}$; logo, $p'(a) = b_1$ (ou seja, $b_1 = p'(a)$).

De modo geral:

$p^{(k)}(x) = k(k-1)\ldots 1 .b_k + (k+1)k\ldots 2\, b_{k-1}(x-a) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\, b_n (x-a)^{n-k}$; logo $p^{(k)}(a) = k!\, b_k$ (ou seja, $b_k = p^{(k)}(a) / k!$).

17. A equação é (x–i)(x–1–2i) = 0.

18. Neste caso, a equação tem também –i e 1–2i como raízes e é $(x-i)(x+i)(x-1-2i)(x-1+2i) = (x^2+1)(x^2-2x+5) = 0$.

19. Como o polinômio tem coeficientes reais, deve-se ter também P(1–i) = 0. O polinômio de grau mínimo satisfazendo as condições dadas tem grau 2 e é da forma P(x) = a(x–1–i)(x–1+i) = a(x^2 –2x +2). Para x= 3, temos 2 = P(3) = a. 5. Logo, a = 2/5 e o polinômio é P(x) = 2/5(x^2 – 2x + 2).

20. O polinômio deve satisfazer, ainda P(–i) = 2 e P(1–i) = 0. O polinômio de grau mínimo tem grau 3, e é da forma P(x) = (x– (1+i))(x– (1–i))(ax+b) = (x^2 –2x +2)(ax+b). Para x = i, temos 2 = P(i) = (1–2i)(ai + b) = (2a + b) + (a–2b)i. Logo, devemos ter 2a+b=2 e a–2b = 0, ou seja, a = 4/5 e b = 2/5. Assim, P(x) = (x^2 –2x +2)(4/5x+2/5) = $\frac{2}{5}(2x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$.

21. Seja p(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ um polinômio de grau ímpar. Vamos supor que $a_n > 0$ (argumento análogo vale no caso em que $a_n < 0$). Podemos escrever, para todo x?0, $p(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$. Tomemos um valor positivo de x tal que cada uma das frações $\frac{a_{n-1}}{x}, \frac{a_1}{x^{n-1}}, ..., \frac{a_0}{x^n}$ seja menor que a_n/n em valor absoluto (tal valor existe, já que cada uma desta frações pode ser tornada arbitrariamente pequena, bastando fazer com que x seja suficientemente grande). Para tal valor de x (e também para –x), o sinal da expressão dentro dos parênteses terá, então o mesmo sinal de a_n, ou seja, a expressão assumirá um valor positivo. Logo, p(x) > 0 (já que $x^n > 0$) e p(–x) < 0 (já que $(-x)^n < 0$).

22. Observamos que p(x) = $\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, para x?1. Logo, toda raiz do polinômio é raiz de $x^{n+1} - 1 = 0$. Para n par, a única raiz desta equação é x = 1. Como p(1) = n+1 ? 0, 1 não é raiz do polinômio original. Portanto, p(x) não tem raízes raízes. Quando n é ímpar, –1 também é raiz de $x^{n+1} - 1 = 0$ e é raiz de p(x).

23. Seja x = $\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$. Temos (x–$\sqrt{3}$ $)^2$ = 1+ $\sqrt{2}$, ou seja, $x^2 - 2\sqrt{3}$ x+3 = 1+ $\sqrt{2}$, ou ainda $2\sqrt{3}$ x+ $\sqrt{2}$ = x^2 + 2. Elevando novamente ao quadrado, obtemos $12x^2$ + $4\sqrt{6}$ x+2 = $(x^2 + 2)^2$, ou seja, $4\sqrt{6}$ x = $x^4 - 8x^2 + 2$. Elevando uma última vez ao quadrado, obtemos, finalmente $96x^2 = (x^4 - 8x^2 + 2)^2$, o que mostra que x é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros; portanto, x é algébrico.

24. Claramente, 0 não é raiz da equação que, portanto, não se altera quando os dois membros são divididos por x^n, fornecendo $\left(\frac{x+1}{x}\right)^n = 1$; ou seja, $\frac{x+1}{x}$ deve ser igual a uma das raízes da unidade. Portanto, $\frac{x+1}{x} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}$, para k = 0, 1, 2, .., n–1.

Daí, obtemos $x = \dfrac{1}{(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1) + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}}$. Note que, para k = 0, o denominador é nulo.
Logo, há n–1 raízes, correspondendo a k = 1, ..., n–1 na expressão anterior (observe que, de fato, a equação dada é de grau n–1, já que o termo em x^n cancela).

25. Claramente, x = 1 não é raiz da equação, que é equivalente a $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^n = -1$. Logo, devemos ter $\dfrac{x+1}{x-1} = \cos\dfrac{2k\pi+\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{2k\pi+\pi}{n}$, ou seja,

$$x = \frac{(\cos\frac{2k\pi+\pi}{n} + 1) + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi+\pi}{n}}{(\cos\frac{2k\pi+\pi}{n} - 1) + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi+\pi}{n}}$$, para k = 0, 1, 2,..., n–1.

26. Seja $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ (há um erro no enunciado). Elevando ao cubo, obtemos

$$x^3 = (20+14\sqrt{2}) + 3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2 + (20-14\sqrt{2})$$

$$= 40 + 3\left(\underbrace{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}_{x}\right)\sqrt[3]{400-392} =$$

= 40 + 6*x*

Portanto, o número real dado é raiz da equação $x^3 - 6x - 40 = 0$. Pesquisando entre as possíveis raízes inteiras da equação, constatamos que 4 é raiz. Dividindo o polinômio $x^3 - 6x - 40$ por x – 4 encontramos quociente $x^2 + 4x + 10$. Como a equação do 2º. grau $x^2 + 4x + 10 = 0$ não possui raízes reais, concluímos que 4 é a única raiz real da equação $x^3 - 6x - 40 = 0$. Logo, o número $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é necessariamente igual a esta raiz real, ou seja, é igual a 4.

27. Seja $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Basta observar que P(–2) = –1, P(0) = 1, P(1) = –1 e P(2) = 3. Portanto, P(x) tem três raízes reais: uma entre –2 e 0, outra entre 0 e 1 e outra entre 1 e 2. No entanto, a fórmula de resolução das equações do 2º grau envolve calcular

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{27}} = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

28. Temos $p'(x) = 3x^2 - 1$. Como $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, temos:

$p(x_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 - \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25}$ e $p'(x_0) = 3\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{2}{5}$. Logo,

$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{25}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. No próximo passo: