

Matemática Financeira

$$1) 600 = 450 (1+i)^3$$

$$i = \left(\frac{600}{450}\right)^{1/3} - 1 = 10,06\%.$$

$$2a) 1 + I = (1 + i)^{12}$$

$$1 + 1 = (1 + i)^{12}$$

$$i = 2^{1/12} - 1 = 5,95\%$$

$$2b) 1 + I = (1 + i)^3$$

$$1 + 0,39 = (1 + i)^3$$

$$i = 1,39^{1/3} - 1 = 11,60\%.$$

$$3a) 1 + I = (1 + i)^{12}$$

$$I = 1,06^{12} - 1 = 101,22\%$$

$$3b) 1 + I = (1 + i)^4$$

$$I = 1,12^4 - 1 = 57,35\%$$

4a) A taxa é de $30\%/12 = 2,5\%$ ao mês.

$$1 + I = (1 + i)^{12}$$

$$I = 1,025^{12} - 1 = 34,49\%.$$

4b) A taxa é de $30\%/4 = 7,5\%$ ao trimestre.

$$1 + I = (1 + i)^4$$

$$I = 1,075^4 - 1 = 33,55\%.$$

4c) A taxa relativa ao período de capitalização é i/k .

$$1 + I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

$$I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1.$$

$$5) \lim \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1 = e^i - 1.$$

6) O número e é o valor do montante gerado em um ano por um principal igual a 1, a juros de 100% ao ano, capitalizados continuamente.

7a) $e^\delta - 1 = e^{0,12} - 1 = 12,75\%$.

7b) $\ln(1+i) = \ln 1,6 = 47,00\%$

7c) Aproveitando o item anterior, $47,00\%/2 = 23,50\%$.

8) Seja 0 a data da compra. Seja 3 o preço do artigo. Usemos a data 1 como data focal.

Na alternativa a, paga-se $A = 3$.

Na alternativa b, paga-se $B = \frac{1}{1+i} + 1 + (1+i)$

$$B - A = \frac{i^2}{1+i} > 0.$$

Logo, como $B > A$, a alternativa a é preferível.

9a) Supondo uma prestação vincenda de 100 e tomando a data atual como focal: aceitando: pago, na data 0, 70.

não aceitando: pago, na data 1, 100, o que equivale a pagar, na data 0,

$$\frac{100}{1+0,27} = 78,74$$

A proposta é vantajosa.

9b) Supondo duas prestações vincendas de 100 cada e tomando a data atual como focal:

aceitando: pago, na data 0, 120.

não aceitando: pago, na data 1, 100, e, na data 2, 100, o que equivale a pagar, na

data 0, $\frac{100}{1+0,27} + \frac{100}{(1+0,27)^2} = 140,74$

A proposta é vantajosa.

9c) Supondo três prestações vincendas de 100 cada e tomando a data atual como focal:

aceitando: pago, na data 0, 150.

não aceitando: pago, na data 1, 100, na data 2, 100, e, na data 3, 100, o que

equivale a pagar, na data 0, $\frac{100}{1+0,27} + \frac{100}{(1+0,27)^2} + \frac{100}{(1+0,27)^3} = 189,56$

A proposta é vantajosa

10) $\frac{180}{1+0,25} + \frac{200}{(1+0,25)^2} = 272$

O preço à vista é R\$ 272,00.

11a) Tomando a data focal um mês antes da compra,

$$\frac{P}{1,06} = 1000 \frac{1 - 1,06^{-3}}{0,06}$$

$$P = 352,93.$$

11b) Tomando a data focal no ato da compra,

$$P = 1000 \frac{1 - 1,06^{-3}}{0,06}$$

$$P = 374,11.$$

11c) Tomando a data focal um mês depois da compra,

$$P \cdot 1,06 = 1000 \frac{1 - 1,06^{-3}}{0,06}$$

$$P = 396,56.$$

12) O montante pago foi $400 \cdot 1,03^4 \cdot 1,05^5 \cdot 1,09 = 626,30$.

A taxa média de juros é calculada por $626,30 = 400 \cdot (1+i)^{10}$.

$i = 4,59\%$ ao mês.

13) O montante é $0,3 \cdot 1,1^t + 0,7 \cdot 1,18^t$.

A taxa média de juros é calculada por $0,3 \cdot 1,1^t + 0,7 \cdot 1,18^t = 1 \cdot (1+i)^t$

$i = (0,3 \cdot 1,1^t + 0,7 \cdot 1,18^t)^{\frac{1}{t}} - 1$, onde t é o número de meses do investimento. Se $t=1$, a taxa é $15,60\%$; se $t=2$, é $15,66\%$; se $t \rightarrow \infty$, a taxa é 18% .

14a) Usando a data da compra como data focal e considerando um preço igual a 30,

$$21 = 10 + \frac{10}{1+i} + \frac{10}{(1+i)^2}$$

Resolvendo, $i = 51,08\%$.

14b) Tomando para data focal a data da compra e considerando um preço igual a 30,

$$21 = \frac{10}{1+i} + \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3}$$

Resolvendo, $i = 20,20\%$

14c) Tomando para data focal a data da compra e considerando um preço igual a 30,

$$21 = \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3} + \frac{10}{(1+i)^4}$$

Resolvendo, $i = 12,81\%$.

15) Arbitrando o preço em 100 e usando a data da compra como data focal,

$$100 - x > \frac{50}{1,05} + \frac{50}{1,05^2}$$

$x < 7,03\%$.

$$16a) 100 = 94 (1+i)$$

$i = 6,38\%$.

$$16b) 100 = 88 (1+i)^2$$

$i = 6,60\%$.

$$16c) 100 = 72 (1+i)^3$$

$i = 6,84\%$.

17) Sem reciprocidade, receberia 88 para pagar 100 em dois meses. Com reciprocidade, recebe 0,8.88 = 70,4 para pagar $100 - 17,6 \cdot 1,02^2 = 81,69$.

$$81,69 = 70,4 \cdot (1+i)^2$$

$i = 7,72\%$.

$$18a) i/365 < i/360$$

$$18b) 1000 \cdot 0,12 \cdot 16/360 = 5,33$$

$$1000 \cdot 0,12 \cdot 16/365 = 5,26.$$

18c) O montante é $1000 \cdot (1+0,12)^{16/360} = 1005,05$ e os juros são de R\$ 5,05; O montante é $1000 \cdot (1+0,12)^{16/365} = 1004,98$ e os juros são de R\$ 4,98.

$$19) 700 \cdot 0,12 \cdot 11/30 = 30,80.$$

20) a) 48% ao trimestre.

$$b) I = 1,15^3 - 1 = 52,09\% \text{ ao trimestre.}$$

$$c) 100 = 64 \cdot (1+I); I = 56,25\% \text{ ao trimestre.}$$

A melhor é a e a pior é c.

21) $1,12^4 - 1 = 57,35\%$ são os juros quadrimestrais. Deve cobrar $57,35\%/4 = 14,33\%$ ao mês.

$$22a) 300 \cdot 1,15^3 = 456,26.$$

$$22b) 300.1,15^{3+\frac{8}{30}} = 473,59.$$

$$22c) 456,26+456,26.0,15.8/30 = 474,51$$

$$23a) \frac{400}{1,06} = P \frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$$

$$P = 51,27.$$

$$23b) 400 = P \frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$$

$$P = 54,35.$$

$$23c) 400.1,06 = P \frac{1-1,06^{-10}}{0,06}$$

$$P = 57,61.$$

$$24a) P = Ai = 50\ 000.0,006 = 300,00.$$

$$24b) \frac{A}{1+i} = \frac{P}{i}$$

$$P = \frac{50000}{1,006}.0,006 = 298,21.$$

$$25) \text{ O montante que voc\^e deve acumular \^e } 100 \frac{1-1,005^{-360}}{0,005} = 16\ 679,16$$

$$\text{ Para isso, } P \frac{1-1,005^{-360}}{0,005}.1,005^{360} = 16\ 679,16 \text{ e } P = 16,60.$$

$$26) \text{ O montante que voc\^e deve acumular \^e } \frac{100}{0,005} = 20\ 000.$$

$$\text{ Para isso, } P \frac{1-1,005^{-420}}{0,005}.1,005^{420} = 20\ 000 \text{ e } P = 14,04.$$

$$27) \text{ A presta\c{c}\~ao pela tabela Price \^e } P = 3000 \frac{0,1}{1-1,1^{-8}} = 562,33.$$

$$\text{ A amortiza\c{c}\~ao pelo SAC \^e } 3\ 000/8 = 375.$$

| TABELA PRICE | | | | |
|--------------|-----------|--------|-------------|------------------|
| ÉPOCA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | ESTADO DA DÍVIDA |
| 0 | - | - | - | 3 000,00 |
| 1 | 562,33 | 300,00 | 262,33 | 2 737,67 |
| 2 | 562,33 | 273,77 | 288,56 | 2 449,11 |
| 3 | 562,33 | 244,91 | 317,42 | 2 131,69 |
| 4 | 562,33 | 213,17 | 349,16 | 1 782,53 |
| 5 | 562,33 | 178,25 | 384,08 | 1 398,45 |
| 6 | 562,33 | 139,84 | 422,49 | 975,96 |
| 7 | 562,33 | 97,60 | 464,73 | 511,23 |
| 8 | 562,35 | 51,12 | 511,23 | - |

| SAC | | | | |
|-------|-----------|--------|-------------|------------------|
| ÉPOCA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | ESTADO DA DÍVIDA |
| 0 | - | - | - | 3 000,00 |
| 1 | 675,00 | 300,00 | 375,00 | 2 625,00 |
| 2 | 637,50 | 262,50 | 375,00 | 2 250,00 |
| 3 | 600,00 | 225,00 | 375,00 | 1 875,00 |
| 4 | 562,50 | 187,50 | 375,00 | 1 500,00 |
| 5 | 525,00 | 150,00 | 375,00 | 1 125,00 |
| 6 | 487,50 | 112,50 | 375,00 | 750,00 |
| 7 | 450,00 | 75,00 | 375,00 | 375,00 |
| 8 | 412,50 | 37,50 | 375,00 | - |

28a) A prestação é $35000 \frac{0,01}{1-1,01^{-180}} = 420,06$

28b) $420,06 \frac{1-1,01^{-80}}{0,01} = 23\ 056,28$.

29a) A amortização é $35\ 000/180 = 194,44$.

A dívida na época da 99ª prestação é $81.194,44 = 15\ 750$.

Os juros da centésima prestação são $157,50$ e a centésima prestação é igual a $194,44+157,50 = 351,94$.

29b) O estado da dívida é $80.194,44 = 15\ 555,56$.

30a) Supondo a dívida igual a 100, a prestação para 150 meses é

$P_{150} = 100 \frac{0,01}{1-1,01^{-150}} = 1,29$ e a prestação para 300 meses é

$$P_{300} = 100 \frac{0,01}{1 - 1,01^{-300}} = 1,05$$

A redução é de $0,24/1,29 = 18\%$, aproximadamente.

$$30b) \text{ A dívida na época 75 é } 1,29 \frac{1 - 1,01^{-75}}{0,01} \cong 68$$

32% da dívida já foi amortizada.

31a) Supondo a dívida igual a 300, a prestação para 150 meses é

$$P_{150} = \frac{300}{150} + 3 = 5$$

$$\text{A prestação para 300 meses é } P_{300} = \frac{300}{300} + 3 = 4$$

A redução é de 20%.

31b) 50%.

$$32) \text{ A original custa, por ano, } 280 \frac{0,12}{1 - 1,12^{-5}} = 77,7$$

A alternativa.

$$33) \text{ O custo de comprar é } 2000 - \frac{300}{1,01^{30}} = 1777,42$$

$$\text{Isso equivale a um custo mensal } 1777,42 \frac{0,01}{1 - 1,01^{-30}} = 68,87 \text{ mais a manutenção,}$$

dando um custo mensal total de 73,87.

É melhor comprar.

34)

| | | |
|-----------------|-----|------------------------|
| dinheiro | 100 | 1516 |
| preço | 1 | 12,09 |
| Poder de compra | 100 | $1516/12,09 \cong 125$ |

A rentabilidade real foi de 25%.