A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO, Vol. 2

Soluções

1.1 Progressões Aritméticas

1) O aumento de um triângulo causa o aumento de dois palitos.Logo, o número de palitos constitui uma progressão aritmética de razão 2.
$a_n = a_1+(n-1)r = 3+(n-1)2 = 2n+1$.

2) Sejam x–2r, x–r, x, x+r, x+2r os ângulos. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é 540°. Logo, 5x = 540° e x, que é o ângulo mediano, vale 108º.

3) $-x-(3-x) = \sqrt{9-x} - (-x)$
$-x-3 = \sqrt{9-x}$
Elevando ao quadrado (o que pode criar raízes estranhas),
$x^2 + 6x + 9 = 9 - x$
$x^2 + 7x = 0$
As raízes dessa equação são 0 (que é estranha) e –7 (que satisfaz).
Logo, x = –7.
A progressão é 10, 7, 4, 1, –2,...
Logo, $a_5 = -2$

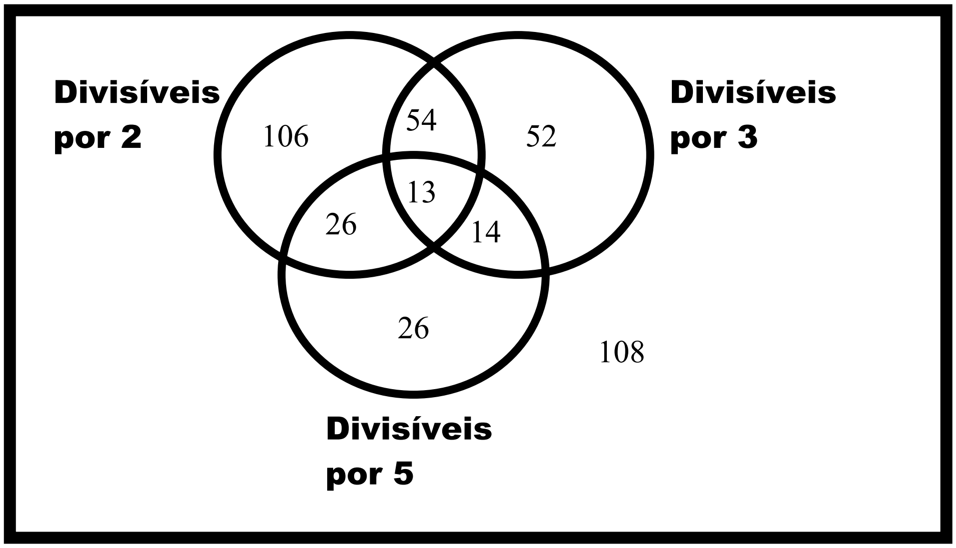
4) $a_{25} = a_1+24r = 2+24.3 = 74$
$a_{41} = a_1+40r = 2+40.3 = 122$
Observe que do 25° termo, inclusive, ao 41°, inclusive, há 41–24 = 17 termos.
S = $\dfrac{(a_{25}+a_{41})17}{2} = \dfrac{(74+122)17}{2} = 1\ 666$

5) 200 = 11.18+2; logo, 205 = 11.18+7.
400 = 11.36+4 = 11.35+15; logo, 392 = 11.35+7
As parcelas a somar são 11.18+7, 11.19+7, 11.20+7,... , 11.35+7, que formam uma progressão aritmética de razão 11, cujo primeiro termo é 205, cujo último termo é 392 e cujo número de termos é 35–17 = 18.
A soma vale S = $\dfrac{(205+392)18}{2} = 5373$

6a) Total: 101, 102,..., 499. São 499–101+1 = 399 números
Divisíveis por 2: 102, 104,..., 498. São 249–51+1 = 199 números.
Divisíveis por 3: 102, 105,..., 498. São 166–34+1 = 133 números.

Divisíveis por 5: 105, 110,...,495. São 99–21+1 = 79 números.
Divisíveis por 6: 102, 108,..., 498. São 83–17+1 = 67 números.
Divisíveis por 10: 110, 120,..., 490. São 49–11+1 = 39 números.
Divisíveis por 15: 105, 120,..., 495. São 33–7+1 = 27 números.
Divisíveis por 30: 120, 150,..., 480. São 16–4+1 = 13 números.-+

Preenchendo o diagrama de dentro para fora encontramos:



A resposta é108.

6b) Total: 101, 102,..., 499. A soma vale $\frac{101+499}{2}.399 = 119\ 700$

Divisíveis por 2: 102, 104,..., 498. A soma vale $\frac{102+498}{2}.199$ = 59 700.

Divisíveis por 3: 102, 105,..., 498. A soma vale $\frac{102+498}{2}.133$ =39 900.

Divisíveis por 5: 105, 110,...,495. A soma vale $\frac{105+495}{2}.79$ = 23 700.

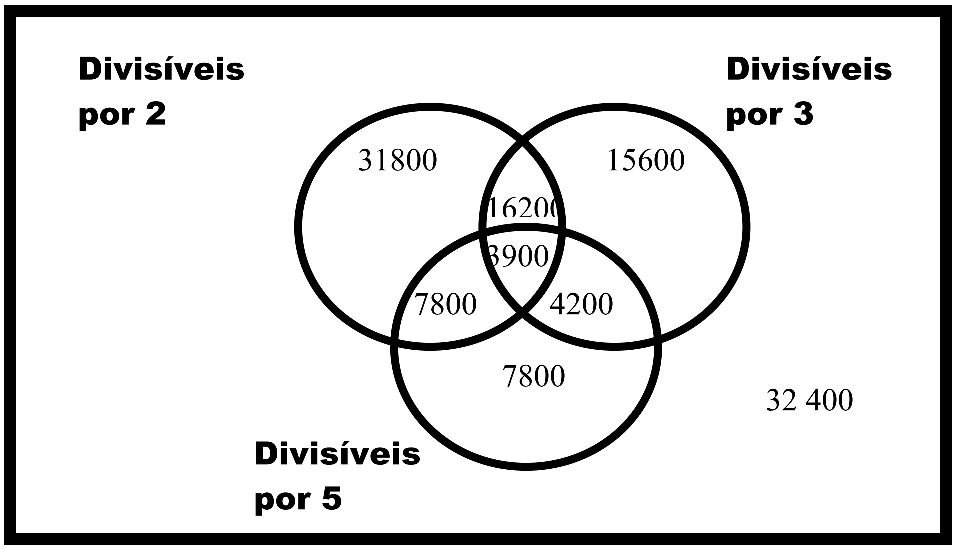
Divisíveis por 6: 102, 108,..., 498. A soma vale $\frac{102+498}{2}.67$ = 20 100.

Divisíveis por 10: 110, 120,..., 490. A soma vale $\frac{110+490}{2}.39$ = 11 700.

Divisíveis por 15: 105, 120,..., 495. A soma vale $\frac{105+495}{2}.27$ = 8 100.

Divisíveis por 30: 120, 150,..., 480. A soma vale $\frac{120+480}{2}.13 =$ 3 900.

Preenchendo o diagrama de dentro para fora encontramos:



A resposta é 32 400.

7) $a.(aq).(aq^2).(aq^3).....(aq^{n-1}) = a^n.q^{1+2+3+...+(n-1)} = a^n q^{\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

8) Se para passar do 32 para o 227 e para o 942 avançamos, respectivamente, p e q termos, temos 227 = 32+pr e 942 = 32+qr. Daí, $\frac{p}{q} = \frac{195}{910} = \frac{3}{14}$. Como p e q são inteiros, é fácil descobrir todos os valores possíveis de p e q: basta descobrir as frações equivalentes a $\frac{3}{14}$. Como queremos o maior valor de r, devemos ter p e q mínimos, ou seja, p=3 e q=14. Substituindo, r = 65.

9) Se $100 = (a+1)+(a+2)+...+(a+n) = \frac{(2a+n+1)n}{2}$, e n>1, então 200 = (2a+n+1)n. Devemos descobrir as decomposições de 200 como produto de dois inteiros positivos. Para ganhar tempo, observe que n e 2a+n+1 têm paridades diferentes; logo, basta considerar as decomposições como produto de um inteiro par por um

ímpar. Como 200 = 8.25, os únicos divisores ímpares de 200 são 1, 5 e 25.
Daí resultam as soluções:

n	2a+n+1	a	decomposição
5	40	17	18+19+20+21+22
25	8	–9	–8–7–6–...+14+15+16
8	25	8	9+10+11+12+13+14+15+16
40	5	–18	–17–16–15–...+20+21+22
200	1	–100	–99–98–97–...+97+98+99+100

Há, portanto, 5 decomposições, em duas das quais as parcelas são naturais.

10) A soma de todos os elementos da matriz é $1+2+...+n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}$. Como a soma de todos os elementos é igual a n vezes a constante mágica, a constante mágica vale $C = \frac{1}{n}.\frac{(n^2+1)n^2}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

11) Na primeira volta são riscados
1, 16, 31, ..., 991 (múltiplos de 15 aumentados de 1; 67 números)
Na segunda volta são riscados
6, 21, 36, ..., 996 (múltiplos de 15 aumentados de 6; 67 números)
Na terceira volta são riscados
11, 26, 41, ..., 986 (múltiplos de 15 aumentados de 11; 66 números)
São riscados 67+67+66 = 200 números. Sobram 800 números não riscados.

Outra solução:
Como 1000/15 = 200/3, ligando os pontos riscados formamos um polígono estrelado de 200 vértices e espécie 3. Sobram, portanto, 800 números não riscados.

12) Não. Se pertencessem, existiriam inteiros p e q tais que $\sqrt{3} = \sqrt{2} + pr$ e $\sqrt{5} = \sqrt{2} + qr$. Daí, $\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{15} - \sqrt{6} - \sqrt{10} + 2$ seria racional, o que é absurdo.

13) Considerando a menor e a maior das médias que podem ser obtidas,
$$\frac{1+2+...+(n-1)}{n-1} \le 16{,}1 \le \frac{2+3+...+n}{(n-1)}$$
$$\frac{n}{2} \le 16{,}1 \le \frac{n+2}{2}$$
$30{,}2 \le n \le 32{,}2$
n só pode valer 31 ou 32.
Chamemos de k o número suprimido.

Se n=31, $\frac{1+2+...+31-k}{30}=16{,}1$

1+2+...+31–k = 483

496–k = 483

k=13

Se n=32, $\frac{1+2+...+32-k}{31}=16{,}1$

1+2+...+32–k = 499,1 , o que é absurdo, pois k não seria inteiro.

Logo, n=31; o número suprimido é igual a 13.

14) A desvalorização total é de R$ 6.000,00 e a desvalorização anual é de R$ 6.000,00 / 4 = R$ 1.500,00. Portanto, em três anos a desvalorização foi de R$ 4.500,00 e o valor do bem será R$ 8.000,00 – R$ 4.500,00 = R$ 3 500,00.

15) Este problema é igual ao anterior.

16) A soma de todas as frações da forma $\frac{p}{72}$ que pertencem ao intervalo [4, 7] é

$\frac{288+289+...+504}{72}=1193{,}5$.

Como 72 = $2^3.3^2$, as frações irredutíveis devem ter p relativamente primo com 2 e com 3.

Devemos, portanto, descontar as frações que tenham numerador par ou múltiplo de 3.

A soma das frações de numerador par é

$$\frac{288+290+...+504}{72}=\frac{144+145+...+252}{36}=599{,}5$$

A soma das frações de numerador múltiplo de 3 é

$$\frac{288+291+...+504}{72}=\frac{96+97+...+168}{24}=401{,}5$$

A soma das frações de numerador múltiplo de 6, que são as que têm numerador par e múltiplo de 3 e, portanto, estão incluídas nos dois grupos acima, é

$$\frac{288+294+...+504}{72}=\frac{48+49+...+84}{12}=203{,}5$$

A soma das frações redutíveis é 599,5+401,5–203,5 = 797,5 e a soma das irredutíveis é 1193,5–797,5 = 396.

17) Vamos descobrir o expoente de 7 na decomposição em fatores primos de 1000!. Usaremos o símbolo ~ para significar a igualdade dos expoentes de 7 na decomposição em fatores primos.

1000! = 1.2.3.4.....1000 ~ 7.14.21.....994 = 7^{142}.(1.2.3.....142) ~ 7^{142}.(7.14.21.....140) = $7^{142}.7^{20}$(1.2.3.....20) ~ 7^{162}.(7.14) ~ 7^{164}.

A maior potência é 7^{164}.

18) Devemos determinar a maior potência de 10 que divide 1000!. Para isso, basta

descobrir o expoente de 5 na decomposição em fatores primos de 1000!.
Usaremos o símbolo ~ para significar a igualdade dos expoentes de 5 na decomposição em fatores primos.
$1000! = 1.2.3.4.....1000 \sim 5.10.15.....1000 \sim 5^{200}.(1.2.3.....200) \sim$
$5^{200}.(5.10.15.....200) \sim 5^{200}.5^{40}.(1.2.3.....40) \sim 5^{240}.(5.10.15.....40) \sim$
$5^{240}.5^{8}.(1.2.3.....8) \sim 5^{248}.(5) = 5^{249}$.
1000! termina por 249 zeros.

19a) $1^3+2^3+...+n^3 = An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E$
Para n=1,2,3,4 e 5, obtemos
A+B+C+D+E = 1
16A+8B+4C+2D+E = 9
81A+27B+9C+3D+E = 36
256A+64B+16C+4D+E = 100
625A+125B+25C+5D+E = 225
Subtraindo de cada equação a anterior,
15A+7B+3C+D = 8
65A+19B+5C+D = 27
175A+37B+7C+D = 64
369A+61B+9C+D = 125
Subtraindo de cada equação a anterior,
50A+12B+2C = 19
110A+18B+2C = 37
194A+24B+2C = 61
Subtraindo de cada equação a anterior,
60A+6B = 18
84A+6B = 24
Subtraindo, 24A = 6. Daí, $A = \frac{1}{4}$ e, substituindo, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, D = 0, E = 0.
Logo, $1^3+2^3+...+n^3 = \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

19b) $1.4+3.7+5.10+...+ (2n-1)(3n+1) = An^3+Bn^2+Cn+D$
Para n=1,2,3,4 e 5, obtemos
A+B+C+D = 4
8A+4B+2C+D = 25
27A+9B+3C+D = 75
64A+16B+4C+D = 166
Subtraindo de cada equação a anterior,
7A+3B+C = 21
19A+5B+C = 50
37A+7B+C = 91
Subtraindo de cada equação a anterior,
12A+2B = 29
18A+2B = 41
Subtraindo, 6A = 12 e A = 2.

Substituindo, B = $\frac{5}{2}$, C = $-\frac{1}{2}$, D = 0.

Logo, 1.4+3.7+5.10+...+ (2n–1)(3n+1) = $2n^3+\frac{5}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ = $\frac{n(4n^2+5n-1)}{2}$.

20a) $\lfloor X \rfloor = k,\ k \ge 0,$ se e somente se $k \le X < k+1.$

$\lfloor \sqrt{X} \rfloor = k,\ k \ge 0,$ se e somente se $k^2 \le X < k^2+2k+1.$

Há, portanto, 2k+1 inteiros positivos x para os quais $\lfloor \sqrt{X} \rfloor = k,\ k \ge 0.$

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k = 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$ =

= $\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

20b) Se X é inteiro positivo, $\lfloor \sqrt[3]{X} \rfloor = k, k \ge 0,$ se e somente se $k \le \sqrt[3]{X} < k+1$, ou seja, $k^3 \le X < k^3+3k^2+3k+1$. Há $3k^2+3k+1$ inteiros positivos X tais que $\lfloor \sqrt[3]{X} \rfloor = k.$

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1}k.(3k^2+3k+1)$ = $An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E$

Para n=2, 3, 4, 5 e 6, obtemos

16A+8B+4C+2D+E = 7

81A+27B+9C+3D+E = 45

256A+64B+16C+4D+E = 156

625A+125B+25C+5D+E = 400

1296A+216B+36C+6D+E= 855

Resolvendo o sistema, A = $\frac{3}{4}$, B = $-\frac{1}{2}$, C = $-\frac{1}{4}$, D = 0, E = 0.

A soma vale $\frac{3}{4}n^4-\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$.

20c) Se X é inteiro positivo, $\{\sqrt{X}\} = k, k \ge 0,$ se e somente se $k-\frac{1}{2} < \sqrt{X} < k+\frac{1}{2},$ ou seja, $k^2-k+\frac{1}{4} < X < k^2+k+\frac{1}{4},$ ou ainda, $k^2-k+1 \le X \le k^2+k.$ Há $2k$ inteiros positivos X tais que $\{\sqrt{X}\} = k.$

As parcelas correspondentes a X até 992, inclusive, têm inteiros mais próximos variando de 1 até 31 e as parcelas de 993 a 1000, têm inteiro mais próximo igual a 32. É preciso cuidado porque a soma não abrange todos os números que têm o inteiro mais próximo igual a 32.

A soma pedida é $\sum_{k=1}^{31} 2k.\frac{1}{k}+\frac{1}{32}.(1000-992) =$ 62,25.

20d) A soma pedida é $\sum_{k=1}^{31} 2k.k+32.(1000-992) = 2\frac{31.32.63}{6}+256 = 21\ 088$ (veja o exemplo 19).

21) A soma pedida é a soma de uma progressão aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a 10^{n-1} e último termo igual a 10^n-1.

S = $\frac{\left(10^{n-1}+10^n-1\right).(10^n-10^{n-1})}{2} = \frac{10^{2n}-10^{2n-2}-10^n+10^{n-1}}{2}$ =

$=\frac{1}{2}\left[10^{2n}+10^{n-1}\right]-\frac{1}{2}\left[10^{2n-2}+10^n\right]=$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\overbrace{000\cdots 00}^{n-1}1\overbrace{000\cdots 00}^{n}-\frac{1}{2}\cdot 1\overbrace{000\cdots 00}^{n-4}1\overbrace{000\cdots 00}^{n+1}=$

$=\frac{1}{2}\cdot 98\overbrace{999\cdots 99}^{n-3}1\overbrace{000\cdots 00}^{n}=494\overbrace{999\cdots 99}^{n-3}\ 55\ \overbrace{000\cdots 00}^{n-1}$

22a) $2n^2+n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$; $4n+2 = a_1+a_n$; $4n+2 = a_1+a_1+(n-1)r = rn+2a_1-r$, para todo n. Esses polinômios em n devem ter coeficientes iguais. Daí, r = 4 e $2a_1-r = 2$, ou seja, $a_1=3$; r=4.

22b) $n^2+n+1 = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$; $2n^2+2n+2 = na_1+na_n$; $2n^2+2n+2 = na_1+na_1+n(n-1)r = rn^2+(2a_1-r)n$, para todo n. Esses polinômios em n devem ter coeficientes iguais. Daí, r = 2, $2a_1-r = 2$ e 2 = 0, o que é absurdo.
Não existe tal progressão.

23a) O primeiro elemento da linha de número 31 é precedido por 1 elemento na primeira linha, 2 na segunda,..., 30 na trigésima. Ora, 1+2+...+30 = $\frac{(1+30).30}{2}=465$. O primeiro elemento da linha de número 31 é o elemento a_{466} da progressão aritmética dos números ímpares.
$a_{466} = a_1+465r = 1+465.2 = 931$.

23b) O último elemento da linha de número 31 é $a_{496} = a_1+495r = 1+495.2 = 991$.
A soma vale S = $\frac{(931+991).31}{2}=$29 791.

24) Quem disser 55 ganha o jogo, pois não permite ao adversário alcançar 63 e, escolhendo o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário,

alcançará o 63.
Analogamente, as posições ganhadoras são 63, 55, 47, 39, 31, 23, 15, 7.
O primeiro jogador tem a estratégia ganhadora: começar dizendo 7 e, a partir daí, escolher sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário.

25) Quem disser 56 ganha o jogo, pois não permite ao adversário alcançar 64 e, escolhendo o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário, alcançará o 64.
Analogamente, as posições ganhadoras são 64, 56, 48, 40, 32, 24, 16, 8.
O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário.

26) Quem disser 54 ganha o jogo, pois não permite ao adversário alcançar 63 e, escolhendo o complemento para 9 do número escolhido pelo adversário, alcançará o 63.
Analogamente, as posições ganhadoras são 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9.
O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 9 do número escolhido pelo adversário.

27) Recebendo o jogo em 51, 59, 60, 61 ou 62, jogue 3. Recebendo em 50, 57 ou 58, jogue 5. Recebendo em 52, 54, 55 ou 56, jogue 7. Recebendo em 49 ou 53, jogue 6. Recebendo abaixo de 49, jogue de qualquer jeito.

28) O Botafogo joga 23 vezes, o Santos joga (sem contar a partida contra o Botafogo, já contada) 22 vezes etc. A resposta é 23+22+21+...+1+0 = $\frac{(23+0).24}{12}$ =
= 276.

29) A área da superfície da bobina enrolada é a área de uma coroa circular $\pi(10^2 - 5^2) = 75\pi cm^2 \cong 236 cm^2$. A área da bobina desenrolada é x.0,01cm, sendo x o comprimento da bobina desenrolada. Daí, x.0,01cm $\cong$ 236cm^2, x $\cong$ 23600cm = 236m
Aproximadamente 236m.

30a) Se não considerássemos as linhas suprimidas, teríamos a progressão aritmética dos números naturais e o primeiro elemento da linha k seria precedido por 1+2+...+(k–1) = $\frac{k(k-1)}{2}$ naturais, sendo, portanto, igual a 1+ $\frac{k(k-1)}{2}$ =
= $\frac{k^2 - k + 2}{2}$.
Com a supressão, o que passa a ser a linha k é a antiga linha 2k–1. Logo, o primeiro elemento da linha k é $\frac{(2k-1)^2 - (2k-1) + 2}{2} =$ $2k^2$–3k+2.
30b) Como na linha k há 2k–1 elementos, o elemento central é $2k^2$–3k+2 + (k–1) =

$2k^2–2k+1$.

30c) Como os elementos da linha k formam uma progressão aritmética, basta multiplicar o termo médio pela quantidade de termos.
A resposta é $(2k^2–2k+1). (2k–1) = 4k^3–6k^2+4k–1$.

30d) A soma pedida é $\sum_{n=1}^{k}(4n^3-6n^2+4n-1)=\sum_{n=1}^{k}[n^4-(n-1)^4]=k^4-0^4=k^4$

31) Se há n retas, a colocação de mais uma reta cria n+1novas regiões. Portanto, se a_n é o número de regiões para n retas, $a_{n+1} = a_n+(n+1)$. Trata-se, portanto, de uma progressão aritmética de segunda ordem.
$a_n = An^2+Bn+C$
Como $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 7$, temos
$A+B+C = 2$
$4A+2B+C = 4$
$9A+3B+C = 7$
Resolvendo, $A = \frac{1}{2}$, $B = = \frac{1}{2}$, $C = 1$.
$a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.
32) $a_n = An^p+P(n)$, sendo P(n) um polinômio de grau menor que ou igual a p.
$\Delta a_n = A(n+1)^p+P(n+1)–An^p–P(n)$, que é de grau menor que ou igual a p.

33) $F(k) = A_0+A_1k+A_2k^2+...+A_pk^p$
$\sum_{k=1}^{n}F(k)=\sum_{k=1}^{n}$ $(A_0+A_1k+A_2k^2+...+A_pk^p) = A_0P_1(n)+A_1P_2(n)+A_2P_3(n)+...+A_pP_{p+1}(n)$,

sendo $P_j(n)$ polinômio de grau n, pelo teorema 1. Logo, $\sum_{k=1}^{n}F(k)$ é um polinômio de grau p+1 em n.

34) $a_n = 2+3(n–1) = 3n–1$, $n = 1, 2,..., 111$.
$b_m = 7+5(m–1) = 5m+2$, $m = 1, 2,..., 31$.
Ora, $a_n = b_m$ se e só se $3n–1 = 5m–2$, ou seja, $n = m+\frac{2m-1}{3}$.
2m–1 deve ser múltiplo de 3. Os valores que m pode ter são 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29.
A resposta é10.

35a) São múltiplos de 4 os anos 2000, 2004, 2008,...,2400.
$a_n = a_1+(n–1)r$
$2400 = 2000+(n–1)4$

n = 101
Mas 2100, 2200 e 2300 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400.
A resposta é 98.

35b) Um ano não-bissexto é formado por 52 semanas e 1 dia e um ano bissexto é formado por 52 semanas e 2 dias. Se um ano não-bissexto começa numa segunda-feira, por exemplo, o ano seguinte começará numa terça; se for bissexto, o ano seguinte começará numa quarta.
De 1997 a 2500 são múltiplos de 4 os anos 2000, 2004, 2008,..., 2496, num total de 125 anos. Mas 2100, 2200 e 2300 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400. Há, portanto, 122 anos bissextos.
Se 1997 começou numa quarta-feira, 2500 começará (2500–1997)+122 = 625 dias de semana depois. Como 625 = 7x89+2, o ano de 2500 começará numa sexta-feira

35c)

1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
quarta	quinta	sexta	sábado	segunda	terça	quarta

A resposta é 2003.

35d) Em cada bloco de 400 anos há 100 anos que são múltiplos de 4 e, destes, 3 não são bissextos por serem múltiplos de 100, mas não de 400. A resposta é
$\frac{97}{400} =$ 0,2425.

36a) É fácil ver que a coleção se completará quando se completarem os calendários dos anos bissextos. Se 1980 se iniciou por uma segunda, as tabelas mostram os dias iniciais dos demais anos bissextos e não-bissextos.

1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
segunda	sábado	quinta	terça	domingo	sexta	quarta

1979	1981	1982	1983	1985	1986	1987	1989
domingo	quarta	quinta	sexta	segunda	terça	quarta	sábado

A coleção se completa em 2004.

36b) Haverá 14 calendários, 7 de anos bissextos e 7 de anos não-bissextos.

37) $$\frac{(a_1 + a_n)\frac{n}{2}}{(b_1 + b_n)\frac{n}{2}} = \frac{2n+3}{4n-1}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{b_1 + b_n} = \frac{2n+3}{4n-1}$$

$$\frac{2a_1+(n-1)r}{2b_1+(n-1)r'}=\frac{2n+3}{4n-1}$$

Pondo n–1 = 2(p–1),

$$\frac{2a_1+2(p-1)r}{2b_1+2(p-1)r'}=\frac{2(2p-1)+3}{4(2p-1)-1}$$

$$\frac{a_1+(p-1)r}{b_1+(p-1)r'}=\frac{4p+1}{8p-5}$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{4n+1}{8n-5}.$$

38) $1+(j-1)+(2j-3)+\ldots+[1+(n-1).(j-2)] = \dfrac{1+1+(n-1).(j-2)}{2}.n = \dfrac{n[(j-2)n-j+4]}{2}.$

39) $\Delta a_k = \Delta b_k \Rightarrow a_{k+1}-a_k = b_{k+1}-b_k \Rightarrow a_{k+1}-b_{k+1} = a_k - b_k$ para todo k e $a_k - b_k$ é constante.

40) $\Delta a^k = a^{k+1}-a^k = a^k.(a-1)$.

41) $\Delta a^k = a^k.(a-1)$.

$$\Delta\frac{a^k}{a-1}=a^k$$

$\Delta^{-1} a^k = \dfrac{a^k}{a-1}+C$, C sendo uma constante arbitrária.

42a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k(3-1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Delta 3^k = \frac{3^{n+1}-3}{2}.$

42b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k.k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1).k!-k!]=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]=\sum_{k=1}^{n}\Delta k! = (n+1)!-1.$

42c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\Delta\frac{1}{k}=-\left(\frac{1}{n+1}-1\right)=\frac{n}{n+1}.$