Progressões Geométricas

1) $100 \rightarrow 1{,}1.100 = 110 \rightarrow 1{,}2.110 = 132$
A resposta é 32%.

2) $100 \rightarrow 0{,}9.100 = 90 \rightarrow 0{,}8.90 = 72$
A resposta é 28%.

3) $100 \rightarrow 1{,}1.100 = 110 \rightarrow 0{,}8.110 = 88$
A resposta é 12%.

4) Sejam v e t, respectivamente, a velocidade antiga e o tempo gasto e sejam v' e t' a velocidade e o tempo depois do aumento.
vt = v't'
vt = 1,6vt'
$t' = \frac{1}{1{,}6}t = 0{,}625t = 62{,}5\%t$
O tempo se reduz em 37,5%.

5) $1 + I = (1 + i)^n$
$1 + I = (1 - 0{,}05)^{12}$
$I = 0{,}95^{12} - 1 \cong -0{,}46$
Aproximadamente 46%.

6) Sejam T o período e λ o comprimento e sejam T' o período e λ' o comprimento depois da variação.
$$\frac{\sqrt{\lambda'}}{T'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{T}$$
$$\frac{\sqrt{\lambda'}}{1{,}2T} = \frac{\sqrt{\lambda}}{T}$$
$$\sqrt{\lambda'} = 1{,}2\sqrt{\lambda}$$
$\lambda' = 1{,}44\lambda = 144\%\lambda$
Devemos aumentar de 44%.

7) Sejam P a pressão e V o volume e sejam P' a pressão e V' o volume depois da variação.
PV = P'V'
PV = P'.0,8V
$P' = \frac{1}{0{,}8}P = 1{,}25P = 125\%P$
A pressão aumenta de 25%.

8) Sejam S, b e h a área, a base e a altura antes da variação e sejam S', b' e h' a área, a base e a altura depois da variação.
S' = b'.h' = 1,1b.0,9h = 0,99.b.h = 99%S
A área diminui de 1%.

9) Os valores formam uma progressão geométrica.
$a_4 = a_0.q^4$
$12\ 000 = 18\ 000\ q^4$
$q = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
$a_1 = a_0.q = 18\ 000\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, ou seja, R$ 16 264,84.

10) Os lados são a, aq, aq^2. Pelo Teorema de Pitágoras, $(aq^2)^2 = (aq)^2 + a^2$. Daí,
$q^4 - q^2 - 1 = 0$ e, como $q>0$, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

11) Se a progressão é estritamente crescente, os lados a, aq, aq^2 satisfazem $q>1$ e
$aq^2 < aq+a$, ou seja, $q^2-q-1 < 0$. Ou seja, $1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
Se a progressão é estritamente decrescente, $\frac{2}{\sqrt{5}+1} < q < 1$, ou seja, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$
A resposta é $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

12) $q = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$
$a_4 = a_3.q = 2^{\frac{1}{6}}.2^{-\frac{1}{6}} = 1$

13) Sejam a, aq, aq^2 os números.
$a+aq+aq^2 = 19$
$a^2+(aq)^2+(aq^2)^2 = 133$
Daí, $a(1+q+q^2) = 19$
$a^2(1+q^2+q^4) = 133$
Dividindo, $a(1-q+q^2) = \frac{133}{19} = 7$
Daí, $\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{19}{7}$

$q = \frac{3}{2}$ ou $q = \frac{2}{3}$.

Se $q = \frac{3}{2}$, substituindo vem a = 4; se $q = \frac{2}{3}$, substituindo vem a = 9.

Os números são 4, 6, 9 ou 9, 6, 4.

14) Sejam x–r, x, x+r a progressão aritmética e x–r+1, x, x+r a progressão geométrica.

$$\begin{cases} x - r + 1 + x + x + r = 19 \\ \dfrac{x}{x - r + 1} = \dfrac{x + r}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ 36 = (6 + r).(7 - r) \end{cases}$$

r = 3 ou r = –2.

Os números são 4, 6, 9 ou 9, 6, 4.

15) Sejam x–6, x, x+6, x–6 os números.

$$\frac{x + 6}{x} = \frac{x - 6}{x + 6}$$

$x^2+12x+36 = x^2-6x$

x = –2

Os números são –8, –2, 4, –8.

16) Se 2^p-1 é primo, os divisores de $2^{p-1}(2^p-1)$ são 1, 2, 2^2,..., 2^{p-1}, (2^p-1), $2(2^p-1)$, $2^2(2^p-1)$,..., $2^{p-1}(2^p-1)$.

A soma desses divisores é $1+2+2^2+...+2^{p-1}+(2^p-1).(1+2+2^2+...+2^{p-1}) =$
$= 2^p.(1+2+2^2+...+2^{p-1}) = 2^p.(2^p-1) = 2.\,2^{p-1}(2^p-1)$.

17) A k-ésima parcela da soma vale $1+10+...+10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9}$. A soma é igual a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9} = \frac{10}{9}.\frac{10^n - 1}{9} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}.$$

18) $444...488...89 = 9 + \underbrace{8.10 + 8.10^2 + ... + 8.10^{n-1}} + \underbrace{4.10^n + 4.10^{n+1} + ... + 4.10^{2n-1}} =$

$$= 9 + 80\frac{10^{n-1} - 1}{9} + 4.10^n\,\frac{10^n - 1}{9} = \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9} = \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2$$

A raiz quadrada é $\frac{2.10^n + 1}{3}$ = 66...67 (n dígitos).

19) Em cada operação o número de folhas dobra. O número de folhas da pilha depois de 33 dessas operações é $2^{32} = 2^2.(2^{10})^3 \cong 4.10^9$.
A altura da pilha vale, aproximadamente, $4.10^9.0,1\text{mm} = 400\text{km}$.
A resposta é D.

20) Em cada operação a quantidade de vinho reduz-se em $\frac{1}{p}$. Os valores da quantidade de vinho formam uma progressão geométrica de razão $1-\frac{1}{p}$.

A resposta é $p\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$.

21a) $12\,600 = 2^3.3^2.5^2.7$

Os divisores positivos de 12 600 são os números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ com $\alpha\in\{0, 1, 2, 3\}$, $\beta\in\{0, 1, 2\}$, $\gamma\in\{0, 1, 2\}$ e $\delta\in\{0, 1\}$.

A soma desses divisores é $\sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta = \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma} 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^0 + \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma} 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^1 =$

$= (1+7) \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma} 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma = 8\sum\limits_{\alpha,\beta} 2^\alpha.3^\beta.5^0 + 8\sum\limits_{\alpha,\beta} 2^\alpha.3^\beta.5^1 + 8\sum\limits_{\alpha,\beta} 2^\alpha.3^\beta.5^2 =$

$= 8(1+5+25)\sum\limits_{\alpha,\beta} 2^\alpha.3^\beta = 248\sum\limits_{\alpha} 2^\alpha.3^0 + 248\sum\limits_{\alpha} 2^\alpha.3^1 + 248\sum\limits_{\alpha} 2^\alpha.3^2 =$

$= 248.(1+3+9) \sum\limits_{\alpha} 2^\alpha = 3\,224\sum\limits_{\alpha} 2^\alpha = 3\,224(1+2+4+8) = 48\,360.$

21b) Os divisores ímpares e positivos de 12 600 são os números da forma $3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ com $\beta\in\{0, 1, 2\}$, $\gamma\in\{0, 1, 2\}$ e $\delta\in\{0, 1\}$.

A soma desses divisores é $\sum\limits_{\beta,\gamma,\delta} 3^\beta.5^\gamma.7^\delta = \sum\limits_{\beta,\gamma} 3^\beta.5^\gamma.7^0 + \sum\limits_{\beta,\gamma} 3^\beta.5^\gamma.7^1 = (1+7) \sum\limits_{\beta,\gamma} 3^\beta.5^\gamma =$

$= 8\sum\limits_{\beta} 3^\beta.5^0 + 8\sum\limits_{\beta} 3^\beta.5^1 + 8\sum\limits_{\beta} 3^\beta.5^2 = 8(1+5+25) \sum\limits_{\beta} 3^\beta = 248.(1+3+9) = 3\,224.$

22a) $0{,}141414... = 0{,}14+0{,}0014+0{,}000014+... = \dfrac{0{,}14}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}14}{0{,}99} = \dfrac{14}{99}$.

22b) $0{,}3454545... = 0{,}3+0{,}045+0{,}00045+0{,}0000045+... = 0{,}3+\dfrac{0{,}045}{1-0{,}01} = 0{,}3+\dfrac{0{,}045}{0{,}99}$

$= \dfrac{3}{10}+\dfrac{45}{990} = \dfrac{19}{55}$.

22c) $0{,}999999... = 0{,}9+0{,}09+0{,}009+... = \dfrac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1$

22d) $1{,}71111... = 1{,}7+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+... = 1{,}7+\dfrac{0{,}01}{1-0{,}1} = 1{,}7+\dfrac{0{,}01}{0{,}9} = \dfrac{17}{10}+\dfrac{1}{90} =$

$= \dfrac{77}{45}$.

23a) $2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+... = \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = 3$

23b) São duas progressões geométricas de razão $\frac{1}{7^2}$. Uma tem primeiro termo $\frac{1}{7}$ e a outra, $\frac{2}{7^2}$. A soma vale $\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}+\frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{3}{16}$.

23c) S = $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...$

$\frac{1}{2}S$ = $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+...$

Subtraindo, $\frac{1}{2}S$ = $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16}+...$ = $\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

e S = 3.

23d) S = $1+2x+3x^2+4x^3+...$, $-1<x<1$

xS = $x+2x^2+3x^3+...$

Subtraindo, $S(1-x) = 1+x+x^2+x^3+... = \frac{1}{1-x}$

S = $\frac{1}{(1-x)^2}$

23e) Grupando de três em três, obtemos $\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+...=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$.

24a) $5+2.\frac{4}{9}.5+2.\left(\frac{4}{9}\right)^2.5+...=5+\frac{2.\frac{4}{9}.5}{1-\frac{4}{9}}=13$ metros.

24b) O tempo que a bola gasta para, partindo do repouso, cair de uma altura h é $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Como as alturas (em metros) das quedas são 5, $\frac{4}{9}.5, \left(\frac{4}{9}\right)^2.5$,..., supondo g = 10m/s^2, os tempos de queda (em segundos) serão 1, $\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2$,...

O tempo total de queda é $1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$ segundos.

A este tempo devemos adicionar o tempo gasto pela bola nas subidas, que é o mesmo, à exceção do 1s da queda inicial.
A resposta é 5s, aproximadamente.

25a) Os lados da poligonal são hipotenusas de triângulos semelhantes na razão (cada um para o anterior) $\frac{b}{a}$.

O comprimento é $a+b+\frac{b^2}{a}+...=\frac{a}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^2}{a-b}$.

25b) É o termo de ordem n de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão $\frac{b}{a}$. A resposta é $a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$.

26a) $\pi.1+\pi.\frac{1}{2}+\pi.\frac{1}{4}+...=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=2\pi$.

26b) $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+...=\frac{2}{1-\frac{-1}{2}}=\frac{4}{3}$.

27) Uma semelhança de triângulos fornece $\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}=\frac{1-r}{1+r}$. Daí, $r_{n+1}=r.r_n$. Os raios formam uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão r. A soma vale $\frac{1-r^n}{1-r}$.

28) $\lim a_n$ = 300+0,3.200+0,3^2.300+0,3^3.200+... = $\frac{300}{1-0,3^2}+\frac{0,3.200}{1-0,3^2}\cong 396$

$\lim b_n$ = 200+0,3.300+0,3^2.200+0,3^3.300+... = $\frac{200}{1-0,3^2}+\frac{0,3.300}{1-0,3^2}\cong 319$

29) $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ é crescente e tem limite $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

1 é verdadeiro; 2, 3 e 4 são falsos; 5 é verdadeiro (basta fazer n=3).

30) S = $\frac{1}{9}+\frac{3}{9^2}+\frac{5}{9^3}+\frac{7}{9^4}+\ldots$

$\frac{1}{9}S$ = $\frac{1}{9^2}+\frac{3}{9^3}+\frac{5}{9^4}+\ldots$

Subtraindo,

$\frac{8}{9}S=\frac{1}{9}+\frac{2}{9^2}+\frac{2}{9^3}+\frac{2}{9^4}+\ldots$ = $\frac{1}{9}+\frac{\frac{2}{9^2}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{5}{36}$

S = $\frac{5}{32}$

31a) $x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{8}}\ldots.=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}=x^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=x$

31b) $x^{1/2}.y^{1/4}.x^{1/8}.y^{1/16}\ldots=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots}.y^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots}=x^{2/3}.y^{1/3}=\sqrt[3]{x^2y}$.

32a) Em cada operação a soma dos comprimentos restantes é 2/3 da anterior. A resposta é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

32b) lim $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ = 0.

32c) Não, o conjunto é infinito.

33) $b_{n+1}-b_n$ = log a_{n+1}– log a_n = log $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ = log q = constante

34) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}}=e^{a_{n+1}-a_n}=e^r$ = constante

35) $A_n = A_0.q^n$

$\frac{A_0}{2}=A_0.q^{1600}$

$q = 2^{-1/1600}$

A massa se reduzirá a 2/3 se $\frac{2A_0}{3}=A_0.q^n$

n = $\frac{\log(2/3)}{\log q}\cong 936$

36) a = $1+10+...+10^{n-1}$ = $\frac{10^n - 1}{9}$

b = $5+10^n$

ab+1 = $\frac{10^{2n} + 4.10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$

A raiz quadrada é $\frac{10^n + 2}{3} = 333...34$ (n dígitos)

37) $A^2 = 5A$

$A^n = 5^{n-1}.A = \begin{bmatrix} 5^{n-1} & 2.5^{n-1} \\ 2.5^{n-1} & 4.5^{n-1} \end{bmatrix}$

38) a) O perímetro aumenta de 1/3 em cada estágio. Logo, os perímetros formam uma progressão geométrica de razão 4/3. O perímetro do estágio de ordem n é $3.\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

b) $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

Somando, $A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

c) ∞, pois a razão da progressão é maior que 1.

d) lim $\left[\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^n \right] = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

39a) A razão da progressão é dada por $880 = 440q^{12}$. Daí, $q = 2^{1/12}$.
A freqüência desse dó é $440.q^3 = 523$ Hz, aproximadamente.

39b) $440/q^2 = 392$ Hz, aproximadamente.

39c) $186 = 440\, q^n$
$n \cong -15$
A nota é Fá #.

40b) $L = 120 + 10 \log_{10} I$
$L' = 120 + 10 \log_{10} (2I)$
$L' - L = 10 \log_{10} 2 \cong 3$.
A resposta é 3dB.

41a) Usando a fórmula de somação por partes,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k=0-0-\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\Delta(k-1)^2=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\Delta\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}=0-2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\Delta(2k-3)=-2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.2=-2+8=6$$

41b) $\sum_{k=1}^{n}k.2^k=\sum_{k=1}^{n}k.\Delta 2^k=n.2^{n+1}-0-\sum_{k=1}^{n}2^k.1=n.2^{n+1}-(2^{n+1}-2)=(n-1)2^{n+1}+2.$