Matemática do Ensino Médio – vol. 1
Soluções do Cap. 9

1) Quando sen$x$ cresce, $f(x)$ decresce e quando sen$x$ decresce, $f(x)$ cresce. Assim, quando sen $x = 1$, $f(x) = 1$, que é o seu valor mínimo e, quando sen $x = -1$, $f(x) = 3$ que é o seu valor máximo.

2) Traçando BC perpendicular ao raio OA e sendo T o ponto de interseção de OB com o eixo tantente à circunferência, vemos que os triângulos OCB e OAT são semelhantes. Logo,
$$\frac{CB}{AT} = \frac{OC}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{t} = \frac{\cos x}{1} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

3) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = (1{,}2)^2$
$1 + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1{,}44$
$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0{,}22$.

4) a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.
b) igual.

5) a) Basta substituir tg$x$ por $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e tudo se resolve.
b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x - \operatorname{ctg} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 - \cos x)} \cdot \dfrac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} =$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x.$$

6) I) $2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$.
II) $2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

7) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2(1 + \operatorname{sen} x) = 3\cos x$.

Elevando ao quadrado,

$4(1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) = 9(1 - \operatorname{sen}^2 x)$
$13\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x - 5 = 0$
o que dá $\operatorname{sen} x = -1$ ou $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$.

Bem, $\operatorname{sen} x = -1$ não serve pois, neste caso, $\cos x = 0$.

Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$ então $\cos x = \pm\dfrac{12}{13}$. Mas como o seno é positivo, o cosseno também deve ser como se nota observando a primeira linha da solução. Logo, temos $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$ e $\cos x = \dfrac{12}{13}$.

8) I) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

II) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

III) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

9) Fazendo AOP = α e BOP = β, temos $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$. Logo,

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{5/6}{5/6} = 1$. Assim, AOB = α + β = 45º.

10) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$.

$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x+x) = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{11}{2}$.

11) a) $2y = 2\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$. Logo, $y = \dfrac{1}{4}$.

b) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \operatorname{tg}$

Logo, os valores mínimo e máximo de y são respectivamente $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.