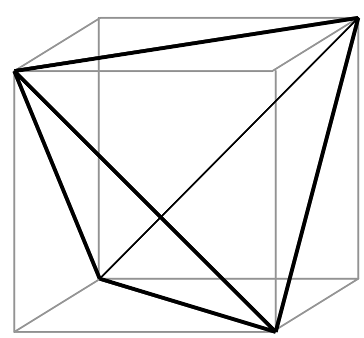
Matemática do Ensino Médio – vol.2

Cap.11 – Soluções

1) a) $V = 10\times6\times1,6 = 96\text{m}^3 = 96000$ litros.
b) A área do fundo é $10\times6 = 60\text{m}^2$ e a área das paredes é $(10 + 6 + 10 + 6)\times1,6 = 51,2\text{m}^2$.
Como a área que será ladrilhada é $60 + 51,2 = 111,2\text{m}^2$ e a área de cada ladrilho é $0,04\text{m}^2$, o número de ladrilhos é $\dfrac{111,2}{0,04} = 2780$.

2) a) $10\times7\times2 = 280$
b) $(10\times7 + 7\times4 + 10\times4)2 = 276$
c) $(10 + 7 + 4)4 = 84$
d) 8

3)



Este é o maior tetraedro que se pode guardar dentro de um cubo. Suas arestas são diagonais das faces do cubo. Seu volume é igual ao do cubo subtraído de quatro tetraedros tri-retângulos:

$$V = a^3 - 4\cdot\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

4) a) A distância do centro de um triângulo equilátero de lado a a um dos vértices é $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AGD, temos:

$$DG^2 = AD^2 - AG^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}.$$

Logo, $DG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

5) a) 8 faces triangulares (equiláteras) e 6 quadradas

b) $V = a^3 - 8\dfrac{(a/2)^3}{6} = \dfrac{5a^3}{6}$.

c) Os vértices de P são os pontos médios das arestas do cubo. A distância do centro do cubo a um desses pontos é $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ que é o raio da esfera circunscrita a P.

6) O octaedro regular é formado por duas pirâmides iguais cuja base comum é um quadrado de lado *a* e cuja altura é metade da diagonal. O volume é

$V = 2\left(\dfrac{a^2}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

7) Se o cubo tem aresta *a* então $V = a^3$. Observe que a a aresta do octaedro mede $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Então, usando o resultado do exercício anterior, o volume do octaedro é:

$V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{V}{6}$.

8) Seja ABCD um tetraedro regular de aresta *a*. Sejam d_1, d_2, d_3, d_4 as distâncias de um ponto P, interior ao tetraedro às faces ABC, ABD, ACD, BCD, respectivamente. Sejam ainda *S* a área de uma das faces e *h* a altura do tetraedro. Vamos decompor o volume do tetraedro na soma dos volumes de quatro outros tetraedros; cada um terá base em uma das faces de ABCD e vértice P.

$V(PABC) + V(PABD) + V(PACD) + V(PBCD) = V(ABCD)$

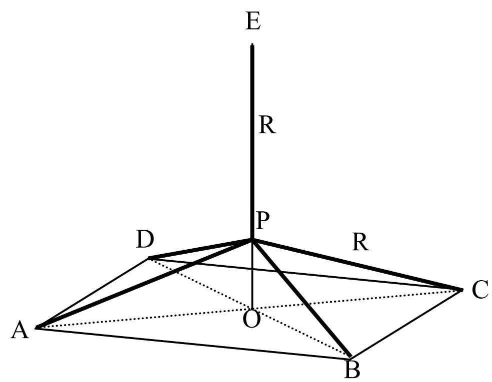
$\dfrac{Sd_1}{3} + \dfrac{Sd_2}{3} + \dfrac{Sd_3}{3} + \dfrac{Sd_4}{3} = \dfrac{Sh}{3}$

$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h$.

9) O volume é $V = \dfrac{6^2 \cdot 4}{3} = 48\,\text{cm}^3$.

A distância do centro da base a uma das arestas da base é 3. Como a altura mede 4, a distância do vértice da pirâmide a uma das arestas da base é igual a 5. Cada face lateral tem então área igual a $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15\,\text{cm}^2$. Logo, a área da pirâmide é $S = 6^2 + 4 \times 15 = 96\text{cm}^2$.

Para encontrar o raio da esfera circunscrita imaginemos um ponto P sobre a reta que contém a altura com a propriedade de ter mesma distância aos cinco vértices.



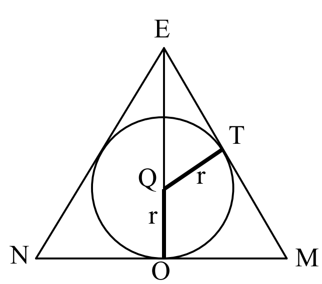
Se PA = PB = PC = PD = PE = R, temos, no triângulo POC, por exemplo,

$$R^2 = (4 - R)^2 + (3\sqrt{2})^2 .$$

Isto dá, $R = \dfrac{17}{4}$.

Aqui, o leitor poderá ficar intrigado se perceber que $R > 4$. Mas, não há problema algum. Este resultado informa que, na verdade, o ponto P, centro da esfera circunscrita, está abaixo do plano da base da pirâmide.

Para encontrar o centro da esfera inscrita imaginemos um ponto Q sobre a altura que seja eqüidistante das cinco faces. Sendo M e N os pontos médios das arestas BC e AD, respectivamente, vamos fazer uma seção pelo plano AMN. O resultado é a figura abaixo:



Como OM = 3, EM = 5 e EQ = 4 – r, temos, pela semelhança dos triângulos ETQ e EOM,

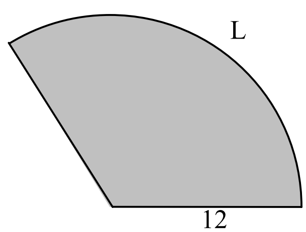
$$\frac{r}{3} = \frac{4 - r}{5}.$$

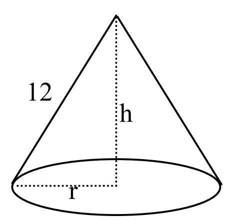
Isto dá r = 1,5cm.

10) A razão entre as áreas da esfera e do cilindro é $\dfrac{4\pi R^2}{2\pi R \cdot 2R + \pi R^2 + \pi R^2} = \dfrac{2}{3}$.

A razão entre os volumes é $\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \dfrac{2}{3}$.

11) Observe as figuras a seguir:





A geratriz do cone mede 12 e o comprimento L do arco de 120º é o comprimento da circunferência da base do cone.
Então, $\dfrac{2\pi \cdot 12}{3} = 2\pi r$, o que dá $r = 4$.
No triângulo retângulo formado pela altura, raio da base do cone e geratriz, temos $h^2 = 12^2 - 4^2 = 128$, ou seja, $h = 8\sqrt{2}$.
O volume do cone é:

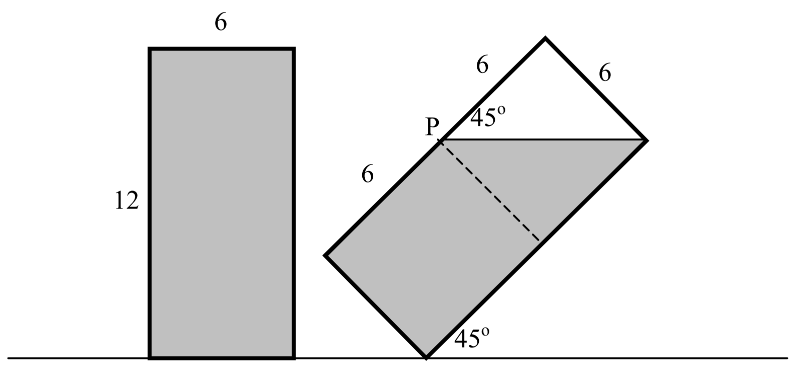
$$V = \frac{\pi 4^2 \cdot 8\sqrt{2}}{3} = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3} \cong 189\,\text{cm}^3.$$

12) O volume é $V = \dfrac{\pi 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi\,\text{cm}^3$. A área é $S = \pi 3 \cdot 5 + \pi 3^2 = 24\pi\,\text{cm}^2$.

Sendo R o raio da esfera circunscrita temos $R^2 = (4 - R)^2 + 3^2$, o que dá $R = \dfrac{25}{4}$.

Para obter o raio da esfera inscrita, faça uma seção por um plano que contém a altura. O resultado é exatamente a última figura do exercício 9. O resultado também é o mesmo: $r = 1{,}5$.

13) Observe a figura abaixo:



No copo inclinado, imaginemos uma seção paralela a base pelo ponto P, médio da geratriz. O copo fica dividido em dois cilindros iguais um dos quais está metade vazio. O volume de água que permaneceu no copo é 3/4 do volume original, ou seja,
$\frac{3}{4}\pi 3^2 \cdot 12 = 81\pi \text{cm}^3$.

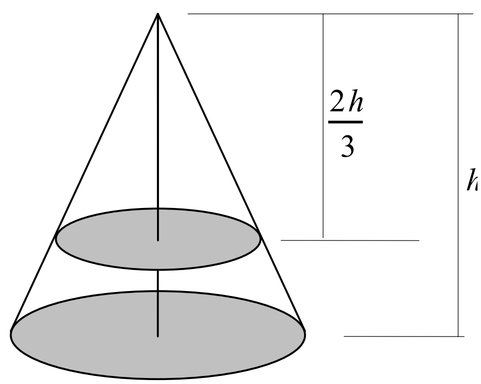
14)
Paralelepípedo retângulo
Sejam a, b, c as dimensões de um paralelepípedo retângulo de volume V e, dada uma constante positiva k, sejam ka, kb, kc as dimensões de um paralelepípedo retângulo de volume V'. Os dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança k e a razão entre seus volumes é $\frac{V'}{V} = \frac{kakbkc}{abc} = k^3$.

Prisma
Imaginemos dois prismas semelhantes na razão k. A razão eentre as alturas é k e as bases são polígonos semelhantes na razão k. Sabemos entretanto que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semalhança. Então, se A e A' são as áreas das bases e se h e h' são as respactivas alturas então a razão entre os volumes é
$\frac{V'}{V} = \frac{A' \cdot h'}{A \cdot h} = \frac{A'}{A} \cdot \frac{h'}{h} = k^2 \cdot k = k^3$.

As justificativas para as outras figuras são análogas.

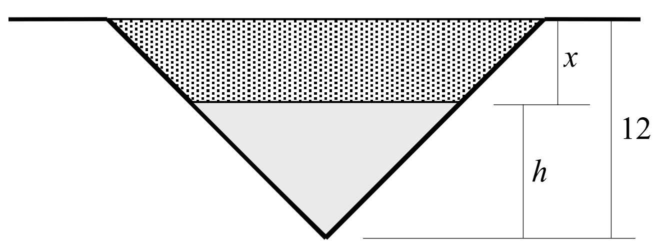
15) A razão de semelhança é $k = \frac{30}{10} = 3$. Sendo V o volume da garrafa original, temos $\frac{V}{50} = 3^3$. Logo, $V = 1350$ml.

16) Observe a figura:



Se V é o volume do cone, V_1 o volume do cone menor e V_2 o volume dea parte compreendida entre os dois planos paralelos temos $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, ou seja, $V_1 = \frac{8V}{27}$ e, portanto, $V_2 = \frac{19V}{27}$.

17) Veja o desenho simplificado abaixo:



Petróleo e água não se misturam e o como o petróleo é menos denso que a água, ele fica em cima. O volume do cone menor é o volume da água, ou seja, 27.000 litros e o volume do cone total é 27.000 + 37.000 = 64.000 litros. Temos então,

$$\frac{27000}{64000} = \left(\frac{h}{12}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{h}{12} \quad \Rightarrow \quad h = 9.$$

Logo, a altura da camada de petróleo é $x = 3$m.

18) Primeira solução (com um pouco de cálculo)
Consideremos um cilindro de revolução com raio x e altura y. Seu volume V é dado e seja S sua área total. Temos então $V = \pi x^2 y$ e $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \dfrac{V}{\pi x^2}$, ou seja, $S = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$. A derivada de S em relação a x é $S' = 4\pi x - \dfrac{2V}{x^2}$ e como devemos ter $S' = 0$, o raio do cilindro é $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Substituindo este valor na fórmula do volume encontramos $y = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.
Observe que $y = 2x$, ou seja, quando o volume é dado, a menor área total é a do cilindro equilátero.

Segunda solução (sem cálculo)
Para fazer sem usar derivada, precisamos do seguinte teorema:
"Se o produto de n números positivos é constante, sua soma será mínima quando eles forem iguais".
A afirmação acima é uma consequência direta da desigualdade entre as médias artmética e geométrica e uma referência pode ser o artigo "Duas Médias" da RPM 18.
A área total do cilindro é dada em função de x por $S = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$. Vamos entretanto escrever a mesma coisa da seguinte forma:
$S = 2\pi x^2 + \dfrac{V}{x} + \dfrac{V}{x}$.
Porém, o produto dessas três parcelas é $2\pi x^2 \cdot \dfrac{V}{x} \cdot \dfrac{V}{x} = 2\pi V^2$ que é constante. Logo, a área total será mínima quando aquelas três parcelas forem iguais, ou seja, $2\pi x^2 = \dfrac{V}{x}$, o que dá $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

19) Não. Ao traçar a diagonal do retângulo, um dos triângulos, ao girar, gera um cone cujo volume é a terça parte do volume do cilindro. O volume gerado pelo outro triângulo é então igual a dois terços do volume do cilindro.