

Funções - Primeira Lista de Exercícios

VERSÃO DE 25/02/2008

Recomendações

- Não é necessário o uso de teoremas ou resultados “complicados” nas resoluções. Basta que você tente desenvolver suas idéias. Faltando alguma “ferramenta” para a solução, pesquise nos livros indicados ou na internet. Em pouco tempo você verá que consegue, mais do que simplesmente encontrar uma solução, enxergar caminhos claros guiado pela sua própria intuição.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas idéias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela. Para isso, leia a parte seguinte.

Antes de começar, um pouco de história . . .

Um matemático muito peculiar foi o indiano S. Ramanujan. Mesmo sem ter uma “grande” formação ele fez inúmeras contribuições na matemática (teoria dos números, aproximações e integrais de funções trigonométricas, etc...). Inclusive hoje, um dos melhores algoritmos usados em computação para estimar o valor de π é de sua autoria. Por exemplo, ele deu a seguinte aproximação para π

$$\pi \approx \left(97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4} = 3,1415926526\dots$$

Como ele a obteve? De “forma experimental”. Vejamos como: primeiro ele observou que na expressão $\pi^4 = 97,0409091034002\dots$ o par de algarismos 09 aparece duas vezes, seguidos de um 10, que é um número ‘próximo’ de 09. Desta forma,

$$97,409090909\dots = \frac{2143}{22} = 97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}$$

é naturalmente uma aproximação para π^4 . Logo, extraindo as raízes, teremos

$$\pi \approx \left(97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{1/4}.$$

A intuição em matemática não vem “do nada”. É preciso testar casos, refletir sobre eles, e buscar regularidades. Tenha isso em mente ao estudar os exercícios.

Agora vamos aos exercícios.

1. Expresse cada número como decimal:
 - a) $\frac{7}{10}$
 - b) $\frac{2}{5}$
 - c) $\frac{9}{15}$
 - d) $-\frac{7}{8}$
 - e) $-3\frac{17}{20}$
 - f) $\frac{4}{11}$
 - g) $-\frac{8}{7}$
 - h) $-\frac{56}{14}$
2. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:
 - a) 2,4
 - b) -3,6
 - c) 0,5555...
 - d) $0,\overline{18}$
 - e) 0,09595...
 - f) $3,\overline{27}$
 - g) 1,38181...
 - h) $-4,\overline{17}$
 - i) 2,472472...
3. Cortou-se, primeiramente, $\frac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se 0,6 do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.
4. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?
5. Transforme os decimais em frações (irredutíveis). Em seguida, faça o que se pede.
 - a) 2,5 e 2,4999...
 - b) 1,02 e $1,01\overline{9}$
 - c) 3,74 e 3,73999...
 - d) $5,\overline{9}$ e 6
 - e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?
 - f) Prove que todo decimal finito admite duas representações decimais distintas.
6. Responda às perguntas, justificando em cada caso.
 - (a) A soma de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?
 - (b) E a soma de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?
 - (c) O produto de dois números racionais é um número racional, ou será que pode ser irracional?
 - (d) E o produto de dois números irracionais é sempre irracional, ou será que pode ser racional?

7. Efetue a expressão em cada item. Em seguida, responda às perguntas

a) $\frac{1}{1+1}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$ c) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$ d) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$

e) Em cada caso, que fração você obtém? Como elas são formadas?

f) Continuando com esse processo, sem fazer contas, qual você acha que será a próxima fração? Por quê?

8. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

a) $3 \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

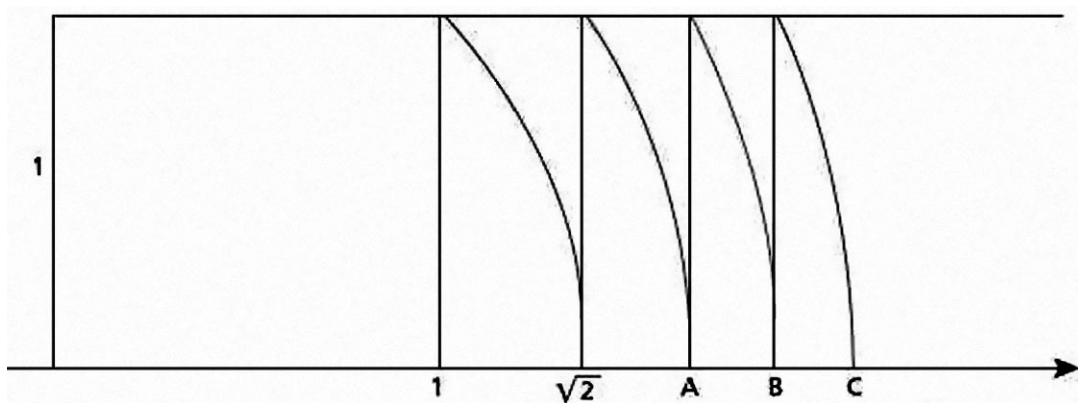
h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

9. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

10. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

11. Que números reais são representados pelos pontos A, B e C na figura a seguir? Explique sua resposta.



12. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

- (a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$
- (b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$
- (c) $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$
- (d) $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$
- (e) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$
- (f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
- (g) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

13. *Desafio 1.* Prove que:

- (a) Um número racional $\frac{m}{n}$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), pode ser representado como um decimal finito se, e somente se, $n = 2^j 5^k$, onde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- (b) Todo número racional $\frac{m}{n}$, onde $n = Np$, $N \in \mathbb{Z}$, p é um primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$, pode ser representado como uma dízima periódica.

14. Utilizando os axiomas que definem o conjunto dos números reais, \mathbb{R} , faça o que se pede nos itens seguintes:

- (a) Mostre que se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$
- (b) Mostre que se $abc = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$
- (c) Se $ab = ac$, então $b = c$? Por quê?
- (d) Se $a^2 = b^2$, então $a = b$? Por quê?
- (e) Mostre que $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, para todos os $b, c \neq 0$
- (f) Mostre que $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$, para todos os $c, d \neq 0$

15. Prove a *Lei do cancelamento da Multiplicação*: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ se $ab = ac$, e $a \neq 0$, então $b = c$.

16. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

- (a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.
- (b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.
- (c) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

17. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^2 \geq 0$.

18. Demonstre que:

- (a) $1 > 0$;
- (b) Se $a \leq b$ e $c \geq d$ então $a - c \leq b - d$.
- (c) Se $0 < a < b$ então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- (d) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
- (e) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
- (f) Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b^2$.
- (g) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.

19. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\frac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número \sqrt{ab} . Se $0 < a < b$, mostre que

- (a) $a < \frac{a+b}{2} < b$.
- (b) $a < \sqrt{ab} < b$.
- (c) $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

20. Sendo a e b números reais quaisquer, mostre que $a^3 \leq b^3$ se, e somente se, $a \leq b$.

21. Se $x \in \mathbb{R}$ tem a propriedade que $0 \leq x < h$ para todo número real positivo h prove que $x = 0$.

22. Prove que os seguintes números são irracionais: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt[3]{7}$.

23. Usando o fato que $\sqrt{2}$ é irracional, prove que entre dois reais a e b com $a < b$, existe um número irracional da forma $r\sqrt{2}$, sendo r racional.

24. Euclides¹ mostrou que há um número infinito de primos usando um argumento muito simples. Ele supôs que houvesse somente um número finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e então considerou o número $p_1 \cdots p_n + 1$ consistindo do produto de todos esses primos mais 1. Dessa forma, esse número

¹Viveu por volta de 300 aC.

não poderá ser primo, já que é maior que todos os primos listados. Portanto, algum primo p_k da lista acima deve dividi-lo. Obtenha com isso uma terrível contradição.

25. Determine o valor de x , sabendo que $\frac{1}{2 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{2}$.

26. Verifique que para todo número $x > 0$, se tem $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (*Dica:* tente multiplicar ambos os lados da desigualdade por x e observar o que acontece.)

27. Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.

28. Qual o valor de x^2 , se $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$? (*Dica:* Eleve ao cubo e depois procure uma equação do segundo grau.)

29. Prove que:

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$

c) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $|x - y| \leq |x| + |y|$

e) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

f) Se $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

g) Dado $c > 0$, tem-se $|x| > c$ se, e somente se, $x < -c$ ou $x > c$.

30. Resolva as inequações

a) $|x - 7| < 9$

b) $|2x + 3| \leq 10$

c) $|3x - 1| < x$

d) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$

e) $|x - 1| + |x - 3| < 4x$

f) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5}$

31. Represente graficamente os seguintes intervalos:

a) $[1, +\infty[$

b) $] -2, +\infty[$

c) $[3, 8[$

d) $] -\infty, -1[\cup [2, +\infty[$

32. Dentre os conjuntos a seguir, distinga quais são intervalos, representando-os com as notações adotadas.

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x < 3x - 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x+3)^2} = x+3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < \frac{1}{2} \text{ e } x \leq 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{|x|} = 1, x \neq 0\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < |4-x|\}$

33. Se $a > 0$ e b é um número qualquer, mostre que $|x - b| < a$ é equivalente a $b - a < x < b + a$ e também equivalente a $x \in]b - a, b + a[$.

34. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

- a) $|x^2 + 2x + 1| < 0$ b) $|(x-2)^2| > 0$
c) $x|x+1| > 0$ e $x|x+1| < 0$ d) $\sqrt{3x^2} > 0$
e) $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} > 2$ f) $\sqrt{2|x|-1} > 0$
g) $3|x| + 1 > 0$ e $3|x| + 1 < 0$ h) $\frac{3}{x} < 5$
i) $\frac{2}{x-1} < 4$ j) $\frac{x}{(3-x)^2} < 2$
k) $\frac{2}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$ l) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$
m) $\frac{x-3}{x-1} > x-4$ n) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

35. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero. Para isso, fatore o trinômio (ou complete os quadrados) e estude o sinal. Expresse a resposta na notação de intervalo.

- a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 + x - 42$ c) $2x^2 - x - 1$
d) $x^2 - 9$ e) $16x^2 - 2x$ f) $x^2 + 3x$
g) $x^2 + x + 1$

Observe como resolvemos a letra g). Faça o mesmo para os próximos itens.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 && \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2 + x + 1 > 0$ se, e somente se, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, isto é, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$. Como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$ é válida para

todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $x^2 + x + 1 > 0$ para $x \in]-\infty, +\infty[$. Por outro lado, $(x + \frac{1}{2})^2 < -\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2 + x + 1 < 0$ é \emptyset , o conjunto vazio.

- h) $x^2 + 1$ i) $-x^2$ j) $-x^2 + 2x - 2$
k) $x^2 + 3x + 3$ l) $2x^2 + x + 1$ m) $x^2 + x - 1$

36. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

- a) $x(x - 3)(6 - x) < 0$ b) $\frac{(x + 1)(2x - 3)}{x + 5} \geq 0$
c) $|5x| > 1$ d) $|3x - 4| \geq 2$
e) $\frac{|x - 1|(x^2 - 2)}{x - 1} > 0$ f) $|x - 3| > x + 1$
g) $\frac{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x^2 + 2)(x^6 + 6)} > 0$ h) $|x - 1| - |x - 3| \geq \frac{|x - 1|}{2}$
i) $\frac{6 - x - x^2}{(x^2 + x + 1)(x + 4)(x - 6)^2} \geq 0$ j) $\frac{(x^2 - 5x + 4)(x + 2)}{(x^2 + 3)(2x + 1)} \geq 0$

37. Mostre que se $|x - 6| < 1$ então $|x| < 7$.

38. Suponha que $|x - 8| < 2$ quão grande $|x - 5|$ pode ser?

39. Obtenha um número $\delta > 0$, tal que se $|x - 1| < \delta$ então $|x^2 - 1| < \frac{1}{10}$.

40. Obtenha um número $\delta > 0$, tal que se $|x - 4| < \delta$ então $|\sqrt{x} - 2| < \frac{1}{10}$.

41. Os elementos da *série de Fibonacci* são definidos como

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Com base nisso, faça que se pede:

- (a) Pesquise mais (em livros ou na internet) a respeito da série de Fibonacci, do número áureo e de suas propriedades na natureza. Pesquise também se existe alguma fórmula para gerar os elementos desta seqüência.
(b) Explique como esta seqüência é formada.

(c) O quociente de um termo desta seqüência pelo termo seguinte se aproxima de que valor, à medida que aumentamos os termos da seqüência?

42. *Desafio 2.* Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, prove que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

43. Usando o exercício anterior, prove que são irracionais:

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\sqrt[4]{5}$
- (c) \sqrt{p} , com p um número primo.
- (d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

44. *Desafio 3. A Conjectura de Fermat.* Antes de morrer, Pierre Fermat afirmou ter obtido uma prova para a seguinte afirmação (conjectura):

Não existem 3 naturais distintos x , y e z tais que $x^n + y^n = z^n$ quando $n \geq 3$.

Observe que o expoente n é um número natural também.

- (a) Verifique que há infinitas soluções para a conjectura de Fermat, quando $n = 1$ ou $n = 2$.
- (b) Já que Andrew Willes provou a conjectura de Fermat, use o que você sabe de matemática para tentar encontrar três naturais distintos x , y e z , tais que $x^2 + y^3 = z^2$.