Funções - Terceira Lista de Exercícios

Recomendações

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de "modelagem matemática". Em ambas as situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados.
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que dêem a você uma idéia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas idéias com os colegas.
- *Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela*

Módulo 1 - A Família das Funções Exponenciais e Potências

1. Nos itens a seguir escreva a expressão dada na forma p/q, onde p e q são números inteiros. Por exemplo:

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

a) $\dfrac{3^{-2}}{2^{-3}}$	b) $\dfrac{1}{2^{-1}}$	c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}$	d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$
e) $\dfrac{2^0}{3^{-2}}$	f) $\dfrac{5^{-1}}{3^{-2}}$	g) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$	h) $16^{-\frac{1}{4}}$
i) $3^{-2}+3$	j) $5^{-1}+25^0$	k) $16^{-\frac{1}{2}}-16^{-\frac{1}{4}}$	l) $8^{-\frac{1}{3}}-2^0$
m) $\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{8^{-\frac{2}{3}}}$	n) $4^{-1}+3^{-1}$	o) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}$	

2. Assuma que todas as variáveis representam número reais positivos somente. Escreva cada uma das seguintes expressões como um produto ou quociente de potências onde cada variável apareça uma única vez, e todos os expoentes são positivos. Veja o exemplo:

$$\left(\frac{x^{-1}y^2z^0}{x^3y^{-4}z^2}\right)^{-1} = \frac{x^3y^{-4}z^2}{x^{-1}y^2z^0} = \frac{x^4z^2}{y^6}$$

a) $x^{-3}x^5$ b) $(x^2y^{-3})^{-1}$ c) $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$ d) $(x^{-3})^2$

e) $(x^{\frac{1}{2}})^{-3}$ f) $(x^3)^{-\frac{1}{3}}$ g) $(x^2y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ h) $(x^3y^{-2})^{-\frac{1}{6}}$

i) $(x^{-2}y^3)^0$ j) $\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}}$ k) $\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}$ l) $\dfrac{a^2x^{-3}}{b^2y^{-2}}$

m) $\dfrac{a^{-2}b^{-2}c}{ab^{-3}c^0}$ n) $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{2x^0y^{-5}}\right)^{-2}$ o) $\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{3^0ab}\right)^{-1}$

3. Nos itens a seguir, escreva a expressão dada como uma fração simples, envolvendo somente expoentes positivos. Assuma que todas as variáveis representam números reais positivos somente.

   a) $x^{-1}+y^{-1}$ b) $x^{-1}-y^{-1}$ c) $\dfrac{x+(xy)^{-1}}{x}$ d) $x^{-1}+y^{-2}$

   e) $(x^{-1}+x^{-2})^{-1}$ f) $x^{-1}+\dfrac{1}{x^{-1}}$ g) $a^{-2}+b^{-2}$ h) $\dfrac{x^{-1}}{y^1}+\dfrac{y}{x}$

   i) $\dfrac{r}{s^{-1}}+\dfrac{r^{-1}}{s}$ j) $(x+y)^{-1}$ k) $(a-b)^{-2}$ l) $xy^{-1}+x^{-1}y$

   m) $x^{-1}y-xy^{-1}$ n) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ o) $\dfrac{a}{b^{-1}}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ p) $(x^{-1}-y^{-1})^{-1}$

   q) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$ r) $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

4. Nos problemas a seguir calcule o fator A. Por exemplo, se $y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=Ay^{-\frac{1}{2}}$ encontramos $A=1+y$. Confira:

$$Ay^{-\frac{1}{2}}=(1+y)y^{-\frac{1}{2}}=y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}.$$

   a) $y^{\frac{3}{4}}=Ay^{\frac{1}{4}}$ b) $x^{\frac{3}{5}}=Ax^{\frac{1}{5}}$ c) $x^{-\frac{1}{3}}=Ay^{-\frac{2}{3}}$

   d) $y^{-\frac{1}{4}}=y$ e) $x^{\frac{2}{3}}+x=Ax$ f) $y^{\frac{1}{2}}+y=Ay$

   g) $x-x^{\frac{2}{3}}=Ax^{\frac{1}{3}}$ h) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=Aa$ i) $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}=Ax^{\frac{3}{2}}$

   j) $x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=Ax^{-\frac{1}{2}}$

5. Nos itens a seguir, encontre uma fórmula que se ajuste às funções representadas pelos dados:

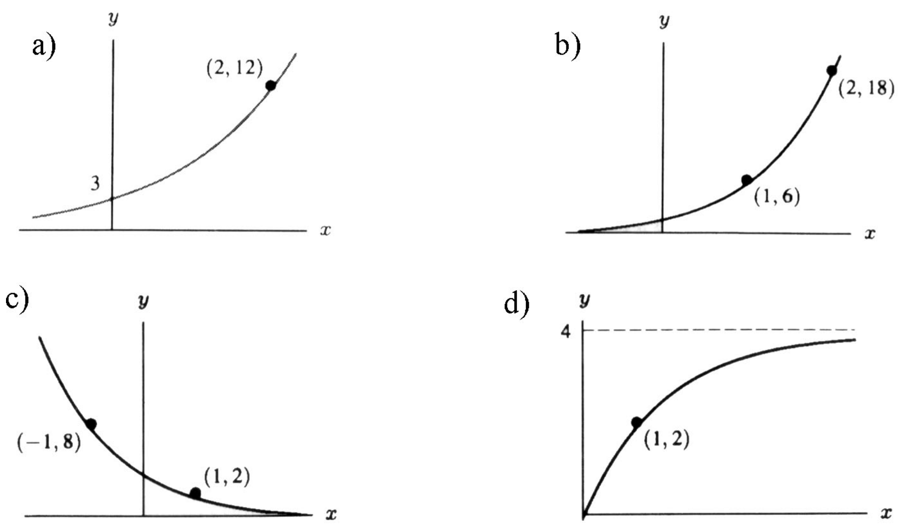
   a)

x	0	1	2	3
$f(x)$	4,30	6,02	8,43	11,80

   b)

t	0	1	2	3
$g(t)$	5,50	4,40	3,52	2,82

6. Encontre as funções exponenciais que possuem o seguinte gráfico:



7. A meia-vida do rádio-226 é de 1620 anos.

   (a) Obtenha uma fórmula para a quantidade Q de rádio que resta após t anos, dado que a quantidade inicial é Q_0.

   (b) Que percentual da substância resta após 500 anos?

8. Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito da grande altitude (2237 metros) poderia causar aos atletas. Presumindo-se que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em 0,4% a cada 30 metros, de que percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?

9. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente de tal modo que, após 10 anos, ainda restam 70% da quantidade inicial. Obtenha uma expressão para a quantidade que ainda resta após um número t qualquer de anos. Que quantidade ainda restará após 50 anos? Qual a meia-vida? Quanto tempo é preciso para que reste somente 20% da quantidade inicial? E para que reste somente 10% ? (Use tentativa e erro onde for necessário.)

10. Escreva cada uma das expressões, a seguir, racionalizando o denominador e simplificando onde seja possível. Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y},$$

onde assumimos que $x \neq y$.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{-4}{1+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x+a}}{1-\sqrt{x+a}}$

g) $\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2}}$

i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

11. Esboce os gráficos de $y = x^{1/2}$ e $y = x^{2/3}$ no mesmo sistema de eixos. Qual função tem valores maiores, quando $x \to \infty$?

12. O que acontece com o valor de $y = x^4$ quando $x \to \infty$? E quando $x \to -1$?

13. Faça alguns cálculos usando valores particulares de x, para verificar que $y = x^{1/3}$ fica acima de $y = x^{1/2}$ e que $y = x^{1/2}$ fica acima de $y = x$ para $0 < x < 1$.

14. Através de tentativa e erro, use uma calculadora para encontrar, com uma precisão de duas casas decimais, o ponto próximo a $x = 10$ onde $y = 2^x$ e $y = x^3$ se cruzam.

15. Use uma calculadora (ou um software) que faça gráficos, para encontrar o(s) ponto(s) de intersecção dos gráficos de $y = (1,06)^x$ e $y = 1 + x$.

16. Para que valores de x temos $4^x > x^4$?

17. Determine os valores inteiros de x e y que satisfazem a equação $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$.

18. Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 2^{x-2y} = \dfrac{1}{8} \\ 3^{xy} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$.

19. Resolva as equações:

a) $(0,533\ldots)^x = \dfrac{225}{64}$ b) $\sqrt[5]{32} = 2$ c) $27 = 3^{5x} \cdot 9^{x^2}$

d) $(0,4)^x + (0,6)^x = 2 \cdot (0,9)^x$ e) $\dfrac{25^x + 125}{6} = 5^{x+1}$ f) $4^{2^{8^x}} = 256$

g) $2^x + \dfrac{4}{2^x} = 5$ h) $\dfrac{625^{1-x} \cdot 5}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x} = \sqrt{5 \cdot 25}$ i) $\dfrac{(11^{3x+1})^2}{11^4} = 11^{10x}$

20. Resolva a equação $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.

21. Qual o valor de x^2, se $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$? (*Dica:* eleve ao cubo e depois procure uma equação do segundo grau.)

22. Um carro a 112 km/h necessita de 54 metros para parar. Supondo que a distância, até parar, é proporcional ao quadrado da velocidade, calcule as distâncias, até parar, deste mesmo carro, a velocidades de 56 km/h e 224 km/h.

23. A Lei de Poiseuille fornece a taxa de fluxo, R, de um gás, através de um tubo cilíndrico em função do raio r, do tubo, para uma dada pressão. Assuma uma queda constante de pressão ao longo do restante deste problema.

    (a) Determine uma fórmula para a Lei de Poiseuille, dado que a taxa de fluxo é proporcional à quarta potência do raio.

    (b) Se $R = 400$ cm^3/s em um tubo com raio 3 cm, para um certo gás, determine uma fórmula explícita para a taxa de fluxo deste gás, através de um tubo de r centímetros.

    (c) Qual a taxa de fluxo do mesmo gás, através de um tubo com raio 5 cm?

24. Devido às sementes aperfeiçoadas e às novas técnicas agrícolas, a produção de grãos de uma certa região vem aumentando. Ao longo de um período de 20 anos, a produção anual (em milhões de toneladas) foi a seguinte:

1970	1975	1980	1985	1990
5,35	5,90	6,49	7,05	7,64

No mesmo período, a população (em milhões de habitantes) foi de:

1970	1975	1980	1985	1990
53,2	56,9	60,9	65,2	69,7

(a) Encontre uma função linear ou exponencial que se ajuste, de modo aproximado, a cada conjunto de dados. (Escolha o tipo de função que melhor se ajustar).

(b) Se esta região foi auto-sustentável para este tipo de grão em 1970, ela foi auto-sustentável entre 1970 e 1990? (Ser auto-sustentável significa que cada pessoa tem uma quantidade suficiente de grãos. Como fica a quantidade de grãos por pessoa nos anos seguintes?)

Módulo 2 - Logaritmos e o número e

25. Resolva as seguintes equações. Uma calculadora e o uso de logaritmos pode ser necessário.

a) $4^x = 7$ b) $5^{x+1} = 9$ c) $6^{2x+3} = 354$

d) $x^5 = 873$ e) $x^4 = 687$ f) $x^{7/2} = 51,4$

g) $2 = (1,02)^t$ h) $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$ i) $5,02(1,04)^t = 12,01(1,03)^t$

26. Resolva para x:

a) $3^x = 6^{x+3}$ b) $7^x = 2^{2x-1}$ c) $2^{x-1} = 5^{2x+1}$

d) $8^{x+2} = 3^{3x-1}$ e) $y = 2^{3x}$ f) $10y = 10^x$

27. Simplifique o máximo possível as expressões

a) $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$ b) $\log(10^{x+7})$

c) $10^{\log A^2}$ d) $10^{2\log Q}$

e) $10^{-\log P}$ f) $10^{-(\log B)/2}$

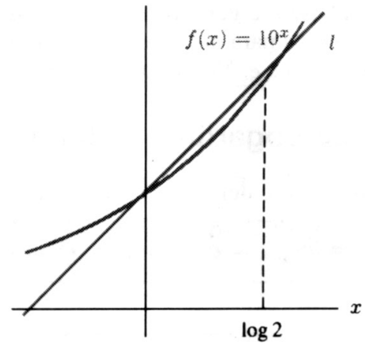
g) $\dfrac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$ h) $2\log\alpha - 3\log B - \dfrac{\log\alpha}{2}$

28. Resolva para x: (aqui $\log x = \log_{10} x$)

a) $\log(3x-1) - \log(x+2) = 2$ b) $\log(x-\sqrt{6}) + \log(x+\sqrt{6}) = 1$

c) $\log(x^2-1) - \log(x+1) = 1$ d) $\log(x^2-4) - 2\log(x-2) = 2$

29. Encontre a equação da reta l, da figura a seguir



30. O *período de duplicação* é o tempo necessário para que uma grandeza que cresce exponencialmente dobrar seu valor. Calcule o período de duplicação de preços que estão subindo a uma taxa de 5% ao ano.

31. A população de uma certa região cresce exponencialmente. Se em 1990 ($t = 0$) havia 40 000 000 pessoas em uma cidade em 200 esse número subiu para 56 000 000 pessoa, encontre uma fórmula para a população em qualquer instante t. Qual seria a população em 2010? E o período de duplicação?

32. (a) Encontre o período de duplicação D, para as seguintes taxas de crescimento anual: i%, 2%, 3%, 4% e 5%.

    (b) Como d diminui à medida que i aumenta, poderíamos supor que D é inversamente proporcional à i, isto é, que $D = k/i$. Use suas respostas ao item anterior para confirmar que $D = 70/i$, aproximadamente. Esta é a "Regra dos 70" usada pelos banqueiros. Para calcular, de forma aproximada, o período de duplicação de um investimento, o banqueiro divide 70 pela taxa de rendimento anual.

33. A meia-vida de uma substância radioativa é de 12 dias. Se inicialmente existe uma quantidade de 10,32 gramas:

    (a) Obtenha uma equação que dê a quantidade Q, da substância, em função do tempo.

    (b) Em quanto tempo a substância ficará reduzida a 1 grama?

34. Determine o domínio de definição das seguintes funções:

a) $\log(-x^2+2x)$

b) $\log\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$

c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}+\log(x^2-4x-5)$

d) $\dfrac{\log(-x^2-6x+16)}{\sqrt[4]{-x^2+x+20}}$

e) $\sqrt[4]{x^2+4x-12}+\log\dfrac{8-x}{x+2}$

35. Dado um número $a>0$ definimos o *logaritmo de base a*, $\log_a x$, como a função inversa de a^x, isto é,

$$\log_a x = c \quad \text{significa} \quad a^c = x.$$

Dados então $a, b > 0$ mostre que vale a seguinte relação

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

36. Nos itens a seguir, encontre o valor da expressão dada:

a) $\log_3 81$ b) $\log_4 16$ c) $\log_2 16$

d) $\log_2\left(\dfrac{1}{32}\right)$ e) $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)$ f) $\log_4\left(\dfrac{1}{64}\right)$

g) $\log_2 1$ h) $\log_7\left(\dfrac{1}{49}\right)$ i) $\log_{13} 13$

j) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ k) $\log_{\frac{1}{6}} 216$ l) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{64}\right)$

37. Se $\log_b a = \log_a b$, que tipo de relação existe entre a e b?

38. Com ajuda de uma calculadora da relação $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, construa uma tabela de logaritmos para os primeiros dez inteiros, nas seguintes bases:

a) 2 b) 3 c) 5

39. Sabendo que $a>0$, simplifique as expressões dadas:

a) $\log_a a^{-x}$ b) $a^{-\log_a x}$ c) $a^{x+\log_a x}$

d) $\log_a(xa^{2x})$ e) $a^{-\log_a x^2}$ f) $a^{\log_a a^x}$

g) $\log_a(a^{\log_a a})$ h) $a^{2\log_a 3}$ i) $\log_a(x^2a^x)$

j) $\log_a(a^{x^2-2x})$ k) $a^{\log_a(a^x)}$ l) $a^{2\log_a x}$

40. Determine x em cada item:

a) $\log_5 x = 3$ b) $\log_6 x = 3$ c) $\log_2 x = 10$

d) $\log_{10} x = \frac{1}{2}$ e) $\log_{10} x = 1$ f) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

41. Determine a em cada item:

a) $\log_a 216 = 3$ b) $\log_a 625 = 4$ c) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

d) $\log_a \frac{1}{49} = -2$ e) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$ f) $\log_a 125 = 3$

42. Determine y em cada item:

a) $2^{\log_2 y} = 13$ b) $6^{\log_6 y} = 21$ c) $4^{\log_4 y} = 9$

d) $y^{\log_4 6} = 6$ e) $y^{\log_7 14} = 14$ f) $y^{\log_3 2} = 2$

43. Determine x em cada item:

a) $5^{\log_5 7} = x$ b) $3^{\log_x 5} = 5$ c) $10^{\log_x 7} = 7$

d) $k^{\log_k 4} = x$ e) $7^{\log_x k} = k$ f) $8^{\log_8 x} = y$

44. Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.

a) $\ln e + \ln(1/e)$ b) $\ln e^2 + e^{-\ln e}$

c) $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$ d) $e^{-\ln\sqrt{e}}$

45. Simplifique completamente as expressões:

a) $2\ln A - 3\ln B + \ln(AB)$ b) $e^{2\ln A - (\ln B)/2}$

c) $\ln(xe^{-\ln x})$ d) $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$

46. Resolva as equações em x:

a) $2^x = e^{x+1}$ b) $2e^{3x} = 4e^{5x}$

c) $4e^{2x-3} - 5 = e$ d) $10^{x+3} = 5e^{7-x}$

47. Nos itens a seguir, converta a função dada para a forma $P = P_o a^t$.

a) $P = P_0 e^{0,2t}$ e $a = 2$ b) $P = P_0 e^{0,917t}$ e $a = 3$

c) $P = P_0 e^{-2,5t}$ e $a = 1,7$ d) $P = P_0 e^{-\pi t}$ e $a = e^2$

48. Converta as funções para a forma $P_o e^{kt}$, determinando quais representam crescimento e quais decaimento exponencial.

    a) $P = P_0 2^t$ b) $P = 10(1,7)^t$ c) $P = 5,23(0,2)^t$ $P = 174(0,9)^t$

49. Resolva as seguintes equações para t

    a) $a = be^t$ b) $P = P_0 e^{kt}$

    c) $ae^{kt} = e^{bt}$ com $k \neq b$ d) $ce^{\alpha t} = be^{\gamma t/n}$, onde $\alpha n \neq \gamma$

50. Encontre a função inversa de $f(x) = 50e^{0,1x}$.

51. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

    (a) A função f é crescente ou decrescente? Por quê?
    (b) Verifique se f é inversível e, caso seja, calcule sua inversa.
    (c) Qual o domínio de f^{-1}?
    (d) Esboce os gráficos de f e de f^{-2} em um mesmo sistema cartesiano, e explique explique a relação entre os gráficos.

52. (a) Uma população cresce de acordo com a equação $P(t) = P_0 e^{kt}$ (com P_0 e k constantes). Encontre o valor da população em função do tempo t, se ela cresce a uma taxa contínua de 2% ao ano e inicia em 1 milhão.
    (b) Desenhe um gráfico da população que você encontrou no item anterior *versus* tempo.

53. O ar em uma fábrica está sendo filtrado de modo que a quantidade P de poluente (medido em mg/litro) está diminuindo de acordo com a equação $P = P_0 e^{kt}$, onde t representa o tempo em horas. Se 10% do poluente são removidos nas primeiras cinco horas:

    (a) Que porcentagem do poluente ainda permanecem após 10 horas?
    (b) Quanto tempo levará até que o poluente seja reduzido a 50% ?
    (c) Desenhe um gráfico da poluição *versus* tempo. Mostre os resultados de seus cálculos no gráfico.
    (d) Explique por que a quantidade de poluente pode diminuir dessa forma.

54. Uma das componentes principais de uma contaminação nuclear, como a de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa contínua de aproximadamente 2,47% ao ano. Estimativas preliminares, após o desastre de Chernobyl, sugeriram que levaria uns 100 anos até que a região fosse novamente segura para a habitação humana. Que percentual do estrôncio-90 original ainda permaneceria após esse tempo?

55. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia-vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Explique sua resposta.

56. A matéria de jornal a seguir é do *The New York Times*, de 27 de maio de 1990. Preencha os três espaços em branco. (Para o último espaço, suponha que os juros foram capitalizados anualmente, e dê sua resposta em dólares. Despreze a ocorrência de anos bissextos.)

213 Anos Após o Empréstimo, Tio Sam Está Perdido

por LISA BELKIN

Especial para o *The New York Times*

SANTO ANTÔNIO, 26 de maio — Há mais de 200 anos, um rico comerciante da Pennsylvania, chamado Jacob DeHaven, emprestou $450.000,00 ao Congresso Continental para socorrer as tropas do Forte Valley. Aparentemente, o empréstimo nunca foi pago. Agora, os descendentes do sr. DeHaven estão acionando o governo dos EUA para receber aquilo de que acreditam ser credores. O total: _____ em dólares atuais, se os juros forem capitalizados diariamente a 6%, a taxa daquela época. Se a capitalização for anual, a conta é somente _____ .

A Família É Flexível

Os descendentes se dizem dispostos a ser flexíveis quanto ao montante de um acordo e que até poderiam vir a aceitar um gesto de gratidão ou, talvez, uma estátua de DeHaven. Mas eles também observam que os juros estão se acumulando em _____ por segundo.

Módulo 3 - Composição de Funções e Mudanças de Escala

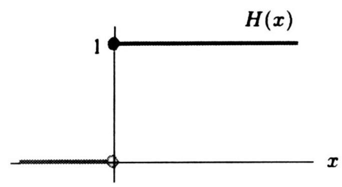
57. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido, através de uma expansão vertical de fator 2, do gráfico de $y = x^2$, seguido de uma translação vertical de 1 unidade para cima. Esboce o gráfico.

(b) Qual é a equação, se a ordem das transformações (expandir e transladar), na parte (a), for trocada?

(c) Os dois gráficos são iguais? Explique o efeito de trocar a ordem das transformações.

58. Qual é a diferença (se é que existe) entre $\ln(\ln(x))$, $\ln^2(x)$ e $(\ln(x))^2$?

59. A função *degrau* de Heaveside, H, é dada pelo gráfico a seguir:



Com base nela, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $2H(x)$ b) $H(x)+1$ c) $H(x+1)$ d) $-H(x)$ e) $H(-x)$

60. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ Pede-se:

a) $\mathrm{Dom}(f)$ b) $\mathrm{Dom}(f \circ f)$ c) Calcular $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) Calcular $f(cx)$ d) Calcular $f(x+h)$

61. Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ a seguir, obtenha $g \circ f$ e $f \circ g$ e seus respectivos domínios de definição.

(a) $f(x) = x-1$ e $g(x) = x^2$.

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$.

(d) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x^2 - x - 2$.

(e) $f(x) = -x^2 - x + 56$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

(f) $f(x) = \sqrt{9-9x^2}$ e $g(x) = \ln x$

(g) $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$

62. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$ duas funções. Demonstre que:

(a) Se f e g são injetoras, então, $g \circ f$ é injetora.

(b) Se f e g são sobrejetoras, então, $g \circ f$ é sobrejetora.

(c) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

(d) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

63. Sejam $S(x) = \sqrt{x}$ e $H(x) = x + 1$. Mostre que:

a) $(S(H(x)))^2 = H(x)$ b) $(H(S(x)))^2 = H(x) + 2S(x)$

64. Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(x) - f(x-1)$

d) $f(x) + f(2)$ e) $f(g(x))$ f) $f(f(g(x)))$

g) $g(f(x))$ h) $f(x) + f(1+x)$ i) $g(g(f(x)))$

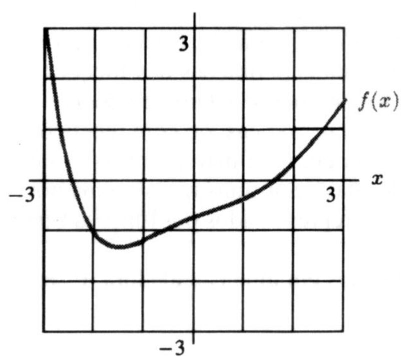
65. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

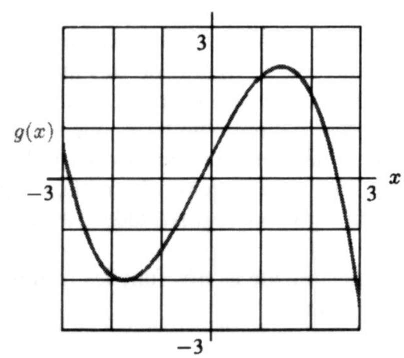
a) $f(1)$ b) $f(e^2)$ c) $g(f(x))$

d) $f(3) + f(\sqrt{x})$ e) $f(x^2 - 1) - f(x^2 + 1)$ f) $f(f(g(x)))$

g) $f(x) + f(10 + x)$ h) $f(g(x))$ i) $g(g(f(x)))$

66. Considere as funções f e g dadas pelos gráficos a seguir:





Com base nelas:

a) Encontre $f(g(1))$, $g(f(2))$ e $f(f(1))$.

b) Esboce os gráficos de $f(g(x)$, $g(f(x))$ e $f(f(x))$.

67. Determinar duas funções, f e g, tais que $h = g \circ f$ nos seguintes casos:

a) $h(x) = (x^2+3)^5$

b) $h(x) = \left(\dfrac{2x+5}{x-4}\right)^3$

c) $h(x) = (\ln(4x))^4 + 5(\ln(4x)) + 2$

d) $h(x) = 2^{\log(2x)}$

e) $h(x) = 3(x - [x])^2 + 1$

f) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

g) $h(x) = 3\sqrt{x} + 4$

h) $h(x) = 2^{-x}$

i) $h(x) = 2^{x^2}$

j) $h(x) = e^{2x} + e^x + 1$

k) $h(x) = \log x^2$

l) $h(x) = (\log x)^2$

m) $h(x) = x^4 + x^2 - 2$

n) $h(x) = 2^{2x} + e^{x+1} + 1$

68. Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = 4^x$ e $h(x) = [x]$. Dizer como são compostas estas funções, para se obter a função $v(x) = 4^{[x^2]}$.

69. Dada a função $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ |x| & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.

70. Considere as funções:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{seno hiperbólico de } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{cosseno hiperbólico de } x$$

Com base nelas, calcule:

a) $\cosh(0)$ e $\cosh(1)$

b) $\operatorname{senh}(0)$ e $\operatorname{senh}(1)$

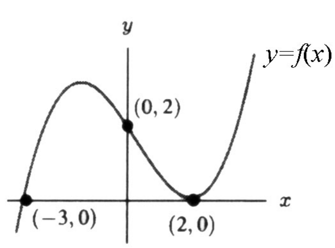
c) $\cosh(\ln x)$ e $\operatorname{senh}(\ln x)$

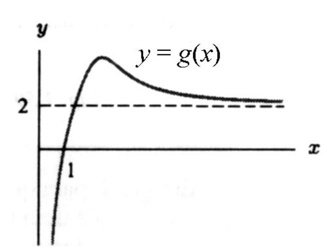
d) $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

e) $\operatorname{senh}(-x)$ e $\cosh(x)$

f) $\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

71. Considere o gráfico das funções dadas a seguir:



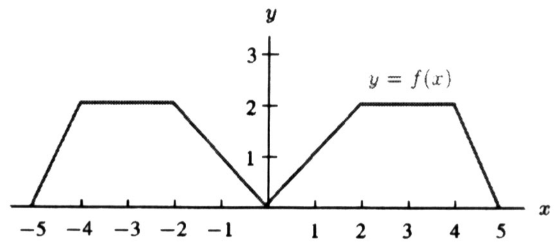


Com base neles, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = f(x+1)$ c) $y = f(x)+1$

d) $y = 2g(x)$ e) $y = g(x+1)$ f) $y = g(x)+1$

72. Considere o gráfico da função $y = f(x)$ dado a seguir:



Com base nele, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2f(x)$ b) $y = 2 - f(x)$ c) $y = \dfrac{1}{f(x)}$

73. Verificar se a função a seguir é par ou ímpar, justificando sua resposta:

a) $f(x) = -x^3 + x$ b) $g(x) = x \log_{\frac{1}{7}} x$

c) $h(x) = \operatorname{senh} x$ d) $v(x) = \cosh x$

e) $w(x) = \operatorname{senh}^3 x \cdot \cosh x$ f) $z(t) = t \cdot \cosh t$

g) $f(x) = |x|$ h) $k(s) = -\dfrac{s}{|s|}$

i) $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ j) $r(t) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 2 \\ x-1 & \text{se} \quad 2 < x \end{cases}$

74. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prove que

a) $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ é uma função par.

b) $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ é uma função ímpar.

75. Complete os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, para $-10 \leqslant x \leqslant 10$, sabendo que $f(x)$ é par e que $g(x)$ é ímpar.