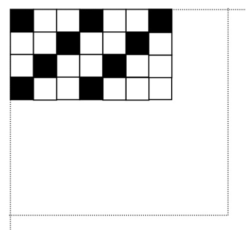
1. Um piso é feito de ladrilhos brancos e pretos, quadrados e de mesmo tamanho. Na primeira fila horizontal, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Na segunda fila, a cada dois ladrilhos brancos segue-se um preto. A terceira fila começa com um ladrilho branco e, a partir daí, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Nas filas $4, 7, 10, \ldots$ repete-se a distribuição da primeira fila. Nas filas $5, 8, 11, \ldots$ repete-se a distribuição da segunda fila e nas filas $6, 9, 12, \ldots$ repete-se a distribuição da terceira fila. Desse modo fica preenchido todo o piso. Na figura ao lado estão desenhados apenas alguns ladrilhos de uma parte quadrada 2015×2015 do piso. Quantos ladrilhos pretos há em todo o quadrado 2015×2015?



Solução:

Para a primeira fila horizontal, a cada 3 ladrilhos, da esquerda para direita, o primeiro é preto e os 2 seguintes são brancos. Logo os ladrilhos pretos nesta fila são os divisores de 3 com resto 1. Dividindo 2015 por 3 obtém-se 671 como quociente e sobra 2 de resto. Logo há 672 pretos na 1ª fila. Dessa forma, também há 672 ladrilhos pretos nas filas $4, 7, 10, \ldots 2014$, que correspondem as filas de ordem numérica que deixam 1 de resto na divisão por 3. Há 672 filas deste tipo, logo teremos $672 \times 672 = 451.584$ ladrilhos nestas filas. (**6 pontos**)

Para a segunda fila horizontal, da esquerda para direita, os primeiros dois ladrilhos são brancos e o seguinte é preto. Logo os ladrilhos pretos nesta fila são os divisores de 3 com resto 0. Da mesma forma que acima, haverá então 671 pretos na 2ª fila. Dessa forma também há 671 ladrilhos pretos nas filas $5, 8, 11, \ldots 2015$, que correspondem as filas cujos números deixam 2 na divisão por 3. Há 672 filas deste tipo, logo teremos $672 \times 671 = 450.912$ ladrilhos nestas filas. (**6 pontos**)

Para a terceira fila horizontal, da esquerda para direita, o primeiro é branco, o segundo é preto e o terceiro é branco. Logo os ladrilhos pretos nesta fila são os divisores de 3 com resto 2. Da mesma forma que acima, haverá então 672 pretos na 3ª fila. Dessa forma também há 672 ladrilhos pretos nas filas $6, 9, 12, \ldots 2013$, que correspondem as filas cujos números deixam 0 na divisão por 3. Há 671 filas deste tipo, logo teremos $672 \times 671 = 450.912$ ladrilhos nestas filas. (**6 pontos**)

Portanto há 1.353.408 ladrilhos pretos no total. (**2 pontos**)

2. Dado que

$$\frac{a-b}{c-d} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{b-d} = 3,$$

onde a, b, c, d são números reais, determine o valor de

$$\frac{a-d}{b-c}$$

Solução:

Temos que

$$a - b = 2c - 2d \quad \text{logo} \quad a + 2d = b + 2c,$$

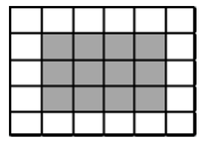
e

$$a - c = 3b - 3d \quad \text{logo} \quad a + 3d = 3b + c, \ \textbf{(4 pontos)}$$

Multiplique a primeira equação por 4 e a segunda por 3 e depois subtraia **(16 pontos)**

$$4(a + 2d) - 3(a + 3d) = 4(b + 2c) - 3(3b + c) \Rightarrow a - d = -5b + 5c \Rightarrow \frac{a-d}{b-c} = -5$$

3. Uma fábrica produz tapetes retangulares com quadrados de mesmo tamanho e de duas cores, brancos e cinzentos. Os quadrados brancos são usados para fazer a borda do tapete e os cinzentos formam um retângulo na parte de dentro. Qualquer quadrado branco está unido a exatamente dois outros quadrados brancos. A figura abaixo mostra um tapete 6×5.



i. Quantos quadradinhos cinzas tem um tapete $m \times n$?

ii. Um tapete é *equilibrado* quando o número de quadradinhos brancos é igual ao de cinzas. Mostre que um tapete $m \times n$ é *equilibrado* se, e somente se,

$$\frac{mn}{(m-2)(n-2)} = 2.$$

iii. Determine todos os valores de m e n para os quais um tapete $m \times n$ é equilibrado.

Solução:

i. Os quadrados cinzentos em um tapete $m \times n$ formam um tapete $(m-2) \times (n-2)$, que tem $(mn - 2m - 2n + 4)$ quadrados **(6 pontos)**.

ii. Se o número de quadrados brancos é igual ao de quadrados cinzentos então o número total de quadrados é igual a duas vezes o número de quadrados cinzentos, ou seja,

$$mn = 2(m-2)(n-2) \Leftrightarrow \frac{mn}{(m-2)(n-2)} = 2 \ \textbf{(6 pontos)}.$$

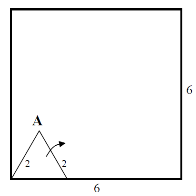
iii. Temos

$$mn = 2(m-2)(n-2) \Leftrightarrow mn = 2mn - 4m - 4n + 8 \Leftrightarrow m = \frac{4(n-2)}{n-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4(n-4)+8}{n-4} = 4 + \frac{8}{n-4}.$$

Da expressão acima concluímos que que m é inteiro se e somente se $\frac{8}{n-4}$ é inteiro, ou seja, se e somente se n assume os valores $5, 6, 8$ e 12; os valores correspondentes de m são $12, 8, 6$ e 5. Logo os tapetes em que o número de quadrados cinzentos e brancos é o mesmo têm as dimensões 12×5 , 8×6 , 6×8 e 5×12 **(8 pontos)**.

4. Um triângulo equilátero de lado 2 é girado ao longo e dentro de um quadrado lado 6 até que o vértice A retorne a sua posição original, como mostrado abaixo. Determine o comprimento do caminho que o ponto A percorreu. Deixe sua resposta em termos de π.



Solução:

Até chegar ao fim do 1º lado o triângulo tombará duas vezes, depois ao tombar para o lado vertical o triângulo tombará mais 1 vez. Ao fazer o 1º tombo o ponto A girará 120º **(5 pontos)**. Ao fazer o 2º tombo o ponto A não sairá do lugar. Ao girar mais uma vez para chegar ao lado vertical direito o ponto A girará mais 30º **(5 pontos)**. Ele repetirá este padrão mais 3 vezes até retornar ao local original, ou seja andará $4 \times (120^{o} + 30^{o}) = 600^{o}$. Finalmente fazendo uma regra de três, denotando por x a distância percorrida, teremos:

$$\frac{360^\circ}{600^\circ} = \frac{2\pi(\text{Raio})}{x} = \frac{4\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{20\pi}{3}$$ **(10 pontos)**.

5. Um conjunto de inteiros consecutivos é *equilibrado* se ele pode ser dividido em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos, de modo que:

   a. Os dois subconjuntos não tenham elementos em comum;

   b. A soma dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;

   c. A soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos quadrados dos elementos do outro.

   Por exemplo, o conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ é *equilibrado*, pois podemos dividi-lo nos subconjuntos $\{7, 10, 12, 13\}$ e $\{8, 9, 11, 14\}$, e $7 + 10 + 12 + 13 = 8 + 9 + 11 + 14$ e também $7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2$.

   i. Verifique que o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é *equilibrado*.

   ii. Mostre que qualquer conjunto de oito naturais consecutivos é *equilibrado*.

   iii. Mostre que nenhum conjunto de quatro naturais consecutivos é *equilibrado*.

   iv. Mostre que se o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N-1, N\}$ é *equilibrado*, então qualquer conjunto de N números inteiros consecutivos é *equilibrado*.

Solução:

i. Pegando a mesma ordem de números do conjunto do exemplo: $\{1^o; 4^o; 6^o; 7^o\} = \{1; 4; 6; 7\}$ e $\{2^o; 3^o; 5^o; 8^o\} = \{2; 3; 5; 8\}$. De fato:

   $1+4+6+7 = 2+3+5+8 = 18 \quad \text{e} \quad 1^2+4^2+6^2+7^2 = 2^2+3^2+5^2+8^2 = 102$ **(4 pontos)**.

ii. Todo conjunto com oito inteiros consecutivos pode ser escrito da forma: $(k+1); (k+2); (k+3); (k+4); (k+5); (k+6); (k+7)$ e $(k+8)$; $k \in \mathbb{Z}$. Podemos dividi-los na mesma ordem acima:

$$\{k+1; k+4; k+6; k+7\} \quad \text{e} \quad \{k+2; k+3; k+5; k+8\}.$$

   De fato:

$$k+1+k+4+k+6+k+7 = k+2+k+3+k+5+k+8 = 4k+18$$

   e

   $(k+1)^2 + (k+4)^2 + (k+6)^2 + (k+7)^2 = (k+2)^2 + (k+3)^2 + (k+5)^2 + (k+8)^2 =$
   $= 4k^2 + 36k + 102$ **(4 pontos)**.

iii. Qualquer conjunto de quatro nos consecutivos pode ser escrito da forma: $\{k-1; k; k+1; k+2\}$; $k \in \mathbb{Z}$. Para escolher 2 conjuntos de 2 números cuja soma dê igual, precisamos escolher o 1º com o 4º e o 2º com o 3º, isto é, $\{k-1; k+2\}$ e $\{k; k+1\}$. Perceba que a escolha de quaisquer outras duplas não tornam as somas das mesmas iguais. Entretanto

$$(k-1)^2 + (k+2)^2 = 2k^2 + 2k + 5 \ \textbf{(I)} \quad \text{e} \quad k^2 + (k+1)^2 = 2k^2 + 2k + 1 \ \textbf{(II)}.$$

Logo para que um conjunto de quatro inteiros consecutivos pudesse ser equilibrado deveríamos ter **(I)** = **(II)**. Isso implica que $2k^2 + 2k + 5 = 2k^2 + 2k + 1$. Isto só ocorre se, e somente se, $5 = 1$, que é um absurdo! Logo nenhum conjunto com 4 inteiros consecutivos é equilibrado **(4 pontos)**.

iv. Se o conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., N-1, N\}$ é equilibrado, então ele pode ser quebrado em 2 subconjuntos de $N/2$ elementos satisfazendo as condições **a.**, **b.** e **c.** acima.

Qualquer conjunto de N números consecutivos poderá ser escrito da forma $Q = \{k+1, k+2, k+3, ..., k+(N-1), k+N\}$ onde $K \in \mathbb{Z}$. Então se existem dois subconjuntos de A que são equilibrados então vale **a.** e **b.**, isto é, não tem elementos comuns e soma dos elementos dos dois subconjuntos são iguais. Supondo, por exemplo, que sejam:

$$A_1 = \{1; N; 3; N-2; \ldots\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{2; N-1; 4; N-3; \ldots\},$$

se somarmos k a cada elemento de A_1 e A_2 teremos os subconjuntos:

$Q_1 = \{k+1; k+N; 3; k+(N-2); \ldots\}$ e $Q_2 = \{k+2; k+(N-1); k+4; k+(N-3); \ldots\}$.

Perceba que estes dois subconjuntos, Q_1 e Q_2, cobrem todos os elementos de Q e também possuem a mesma quantidade de elementos $(= N/2)$, logo a propriedade **a.** é cumprida.

Denotaremos:

$$SA_1 = \text{ Soma de elementos de } A_1, \quad SA_2 = \text{ Soma de elementos de } A_2,$$
$$SQ_1 = \text{ Soma de elementos de } Q_1, \quad SQ_2 = \text{ Soma de elementos de } Q_2,$$
$$S^2A_1 = \text{ Soma dos quadrados dos elementos de } A_1,$$
$$S^2A_2 = \text{ Soma dos quadrados dos elementos de } A_2,$$
$$S^2Q_1 = \text{ Soma dos quadrados dos elementos de } Q_1,$$
$$S^2Q_2 = \text{ Soma dos quadrados dos elementos de } Q_2.$$

Perceba que $SQ_1 = \frac{Nk}{2} + SA_1$ e que $SQ_2 = \frac{Nk}{2} + SA_2$. Como por hipótese $SA_1 = SA_2$ temos $SQ_1 = SQ_2$, portanto para o conjunto Q a propriedade **b.** é cumprida.

Note também que

$$\begin{aligned}
S^2Q_1 &= (k+1)^2 + (k+N)^2 + (k+3)^2 + (k+(N-2))^2 + \ldots = \\
&= (k^2+2k+1) + (k^2+2kN+N^2) + (k^2+2k3+3^2) + (k^2+2k(N-2)+(N-2)^2) + \ldots = \\
&= \frac{Nk^2}{2} + 2k(1+N+3+(N-2)+\ldots) + (1^2+N^2+3^2+(N-2)^2+\ldots) = \\
&= \frac{Nk^2}{2} + 2kSA_1 + S^2A_1.
\end{aligned}$$

Analogamente, $S^2Q_2 = \dfrac{Nk^2}{2} + 2kSA_2 + S^2A_2$. Ainda por hipótese, $SA_1 = SA_2 \Rightarrow 2kSA_1 = 2kSA_2$ **(I)** e $S^2A_1 = S^2A_2$ **(II)**. Somando **(I)** e **(II)** teremos:

$$2kSA_1+S^2A_1 = 2kSA_2+S^2A_2 \Rightarrow \frac{Nk^2}{2}+2kSA_1+S^2A_1 = \frac{Nk^2}{2}2kSA_2+S^2A_2 \Rightarrow S^2Q_1 = S^2Q_2,$$

logo o conjunto Q cumpre a propriedade **c.**.

Concluindo, temos que se o conjunto $A = \{1,2,3,...,N-1,N\}$ é equilibrado então o conjunto $Q = \{k+1,k+2,k+3,...,k+(N-1),k+N\}$ também será equilibrado pois basta tomar na mesma ordem os elementos que formam os subconjuntos de A equilibrados em Q **(8 pontos)**.

6. Considere o número $0,112358314\ldots$ que é dado da seguinte forma: a partir do terceiro dígito depois da vírgula, o próximo dígito é o dígito da unidade da soma dos dois dígitos anteriores à ele. Esse número é racional ou irracional?

Solução:

Temos duas possibilidades:

1. Se o par de dígitos consecutivos $(3,5)$ ocorrer uma segunda vez no número construído teremos que o bloco de dígitos $3583145\ldots$ se repetirá e terminará novamente no par de dígitos consecutivos $(3,5)$. Este bloco continuará se repetindo o que caracteriza a racionalidade do número dado **(7 pontos)**.

2. Se o par de dígitos consecutivos $(3,5)$ não ocorrer uma segunda vez no número construído então afirmamos que algum par de dígitos consecutivos do tipo (a,b) com $a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ irá ocorrer novamente. De fato, pelo princípio da casa dos pombos, é impossível preencher as infinitas casas decimais com as finitas possibilidades da pares consecutivos de dígitos do tipo acima (é uma quantidade finita, 100 no total). Portanto temos que em algum instante ocorre novamente o par de dígitos (a,b). Se tal par de dígitos ocorre novamente, da mesma forma que no item 1., o bloco de dígitos continuará se repetindo e caracterizará um número racional **(13 pontos)**.

Logo o número é racional.