



OPRM 2016

Nível 2

Segunda Fase

24/09/16

Duração: 4 Horas e 30 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

Aplicador(a): \_\_\_\_\_

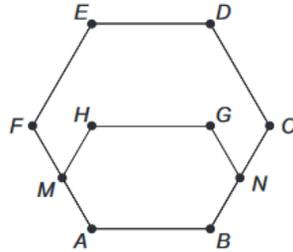
---

### INSTRUÇÕES

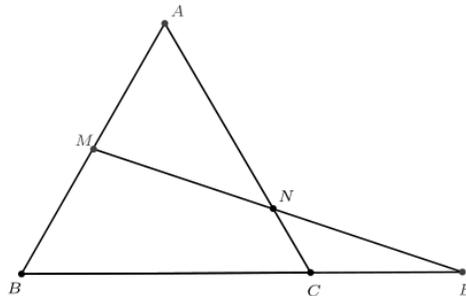
- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **APLICADOR(A)** nos campos acima.
- Esta prova contém 6 páginas (incluindo esta página de capa) e 30 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **APLICADOR(A)** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Após o término do preenchimento, entregue ao **APLICADOR(A)** o gabarito oficial com as respostas.
- Esta prova não precisa ser entregue ao **APLICADOR(A)**.

**BOA PROVA!**

1. O polígono  $ABCDEF$  é um hexágono regular. Os pontos  $M$  e  $N$  são pontos médios dos lados  $AF$  e  $BC$ , respectivamente. O hexágono  $ABNGHM$  é simétrico em relação à reta que passa por  $M$  e  $N$ . Qual é a razão entre as áreas dos hexágonos  $ABNGHM$  e  $ABCDEF$ ?



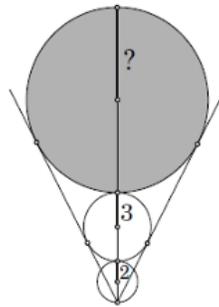
- (A)  $\frac{3}{10}$  (B)  $\frac{4}{11}$  (C)  $\frac{3}{7}$  (D)  $\frac{7}{15}$  (E)  $\frac{5}{12}$
2. Em um triângulo  $ABC$  com  $m(\angle ABC) - m(\angle BAC) = 50$ , a bissetriz do ângulo  $\angle ACB$  intersecta o lado  $AB$  em  $D$ . Seja  $E$  o ponto do lado  $AC$  tal que  $m(\angle CDE) = 90$ . A medida do ângulo  $\angle ADE$  é:
- (A)  $25^\circ$  (B)  $30^\circ$  (C)  $40^\circ$  (D)  $45^\circ$  (E)  $50^\circ$
3. Considere que  $A, B, C, D$  são vértices de um quadrilátero. Se  $AC$  é uma das diagonais desse quadrilátero, a única afirmação que não é necessariamente verdadeira é
- (A)  $AC < AB + BC$   
 (B)  $AC < AD + DC$   
 (C)  $AB < AC + BC$   
 (D)  $DC < AC + AD$   
 (E)  $DC < AB + BC$
4. Na figura abaixo o perímetro do triângulo equilátero  $ABC$  é  $72\text{cm}$ ,  $M$  é o ponto médio de  $AB$  e  $CE = 16\text{cm}$ . Então, a medida do segmento  $CN$ , em  $\text{cm}$ , é um sétimo de



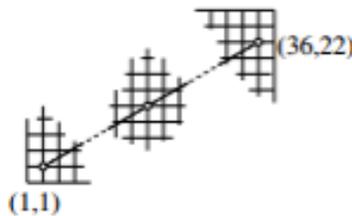
- (A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50 (E) 51
5. Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?
- (A) 192 (B) 204 (C) 217 (D) 225 (E) 254

6. Seis amigos planejam viajar e decidem fazer a viagem em duplas, cada dupla utilizando um meio de transporte diferente, dentre os seguintes: avião, trem e carro. Alexandre acompanha Bento. André viaja de avião. Carlos não acompanha Dário nem faz uso do avião. Tomás não anda de trem. Qual das afirmações a seguir é correta?
- (A) Bento vai de carro e Carlos vai de trem.  
(B) Dário vai de trem e André vai de avião.  
(C) Tomas vai de avião e Bento vai de carro.  
(D) Alexandre vai de trem e Tomas vai de carro.  
(E) André vai de avião e Alexandre vai de carro.
7. Se  $x + y = 1$  e  $x^2 + y^2 = 2$ , quanto que dá  $x^3 + y^3$ ?
- (A) 2 (B) 1,5 (C) 3 (D) 2,5 (E) 4
8. Quantos pares de soluções  $(x, y)$  com  $x$  e  $y$  inteiros positivos satisfazem a equação  $x^4 = y^2 + 71$ ?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 6
9. O algarismo das unidades do número  $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$  é:
- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
10. A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo trocas sucessivas?
- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15
11. O perímetro de um retângulo é  $100\text{ cm}$  e a diagonal mede  $x\text{ cm}$ . Qual é a área do retângulo em função de  $x$ ?
- (A)  $625 - x^2$   
(B)  $625 - \frac{x^2}{2}$   
(C)  $1250 - \frac{x^2}{2}$   
(D)  $250 - \frac{x^2}{2}$   
(E)  $2500 - \frac{x^2}{2}$
12. Quantos números entre 1 e 601 são múltiplos de 3 ou múltiplos de 4?
- (A) 100 (B) 150 (C) 250 (D) 300 (E) 430
13. Se quatro inteiros positivos distintos  $m, n, p, q$  satisfazem a equação
- $$(7 - m)(7 - n)(7 - p)(7 - q) = 4$$
- então a soma  $m + n + p + q$  é igual à:
- (A) 10 (B) 21 (C) 24 (D) 26 (E) 28

14. Uma fábrica produz blusas a um custo de R\$ 2,00 por unidade além de uma parte fixa de R\$ 500,00. Se cada unidade produzida é comercializada a R\$ 2,50 qual é o número mínimo que unidades que a fábrica precisa vender para obter um lucro?
- (A) 500 (B) 501 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1501
15. Sílvia vai a uma fonte que tem três torneiras, encher os seus dez garrafões. Um dos garrafões demora um minuto para encher, outro dois minutos, outro três minutos e assim por diante. Assumindo que as três torneiras possuem a mesma vazão, qual é o menor tempo possível que Sílvia pode levar para encher os 10 garrafões?
- (A) 15 minutos  
(B) 16 minutos  
(C) 19 minutos  
(D) 22 minutos  
(E) 25 minutos
16. Os dois círculos menores da figura abaixo tem raios 2 e 3. Qual é o raio do círculo maior?



- (A) 4 (B) 5 (C) 7,5 (D) 8 (E) 8,5
17. Entre os dois pontos da grelha (1; 1) e (36; 22) temos um segmento de linha que conecta estes dois pontos. Quantos pontos da malha caem exatamente sobre este segmento? Os pontos finais e iniciais do segmento também contam.



- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
18. Um triângulo tem seus ângulos internos em progressão aritmética (P.A.), então podemos afirmar que um de seus ângulos mede (em graus):
- (A) 45 (B) 60 (C) 30 (D) 66 (E) 70

19. Ao calcular as raízes da equação do segundo grau  $x^2 - mx + m + 5 = 0$ , Samuca percebeu que eram catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 5. A soma dos possíveis valores de  $m$  é:
- (A) 2 (B) 12 (C) 7 (D) 10 (E) 8
20. Considere os números  $X = 2^{700}$ ,  $Y = 11^{200}$  e  $Z = 5^{300}$ . Assinale a alternativa correta:
- (A)  $X < Z < Y$   
(B)  $Y < X < Z$   
(C)  $Y < Z < X$   
(D)  $Z < X < Y$   
(E)  $Z < Y < X$
21. Em uma divisão, o quociente é o maior número natural de um algarismo e o divisor é o menor número natural de três algarismos diferentes. Sabendo que o resto é o maior possível, podemos afirmar que o dividendo vale:
- (A) 101 (B) 102 (C) 203 (D) 918 (E) 1019
22. No meu carro, uma marca particular de pneu dura 40.000 quilômetros se utilizado na frente ou 60.000 quilômetros se utilizado atrás. Intercambiando os pneus traseiros e dianteiros, a maior distância que posso andar a partir de um conjunto de quatro pneus novos é:
- (A) 52.000 (B) 50.000 (C) 48.000 (D) 40.000 (E) 44.000
23. Um quadrado de área 54 é dividido em quatro quadrados iguais. O quadrado superior esquerdo é de cor cinza; a parte inferior direita do quadrado é de novo dividida em quatro quadrados iguais, e assim por diante. O padrão continua indefinidamente (infinitas vezes). Qual é a área total da área cinzenta do quadrado?



- (A) 15 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 27
24. Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1m uma da outra. Ele enche seu regador, a 15m da primeira roseira, e, a cada viagem, rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total em metros que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?
- (A) 900 (B) 1800 (C) 1820 (D) 1746 (E) 1830
25. Efetuando a divisão de  $1001^{1001}$  por 6 obtemos como resto:
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

26. O resto da divisão de  $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 1013^2$  quando é dividido por 8 é:  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
27. Um número com três dígitos na base 7 tem seus dígitos no sentido opostos quando escrito na base 9. Qual a representação decimal desse número?  
(A) 238 (B) 248 (C) 256 (D) 326 (E) 386
28. A rampa de acesso à garagem de um edifício sobre um terreno plano tem forma retangular e forma um ângulo de  $60^\circ$  com o solo. Sabendo que ao meio-dia a sombra da rampa tem área igual a  $36m^2$ , calcule a área da rampa.  
(A) 60 (B) 72 (C) 75 (D) 81 (E) 83
29. Sejam  $x, y, z$  inteiros tais que  $x^3 + y^3 - z^3$  é múltiplo de 7. Podemos então dizer que:  
(A) Pelo menos um desses números é múltiplo de 7  
(B) Todos os números são múltiplos de 7  
(C) Pelo menos dois deles são múltiplos de 7  
(D) A soma dos números é múltipla de 7  
(E) Não podemos afirmar nenhuma das anteriores
30. Sejam dois inteiros positivos  $x$  e  $y$  tais que

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}$$

a possível soma para  $x$  e  $y$  é:

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 5 (E) 11