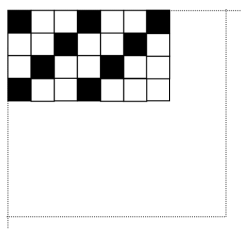


1. Um piso é feito de ladrilhos brancos e pretos, quadrados e de mesmo tamanho. Na primeira fila horizontal, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Na segunda fila, a cada dois ladrilhos brancos segue-se um preto. A terceira fila começa com um ladrilho branco e, a partir daí, a cada ladrilho preto seguem-se dois brancos. Nas filas 4, 7, 10, ... repete-se a distribuição da primeira fila. Nas filas 5, 8, 11, ... repete-se a distribuição da segunda fila e nas filas 6, 9, 12, ... repete-se a distribuição da terceira fila. Desse modo fica preenchido todo o piso. Na figura ao lado estão desenhados apenas alguns ladrilhos de uma parte quadrada  $2015 \times 2015$  do piso. Quantos ladrilhos pretos há em todo o quadrado  $2015 \times 2015$ ?



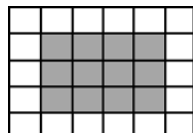
2. Dado que

$$\frac{a-b}{c-d} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{b-d} = 3,$$

onde  $a, b, c, d$  são números reais, determine o valor de

$$\frac{a-d}{b-c}$$

3. Uma fábrica produz tapetes retangulares com quadrados de mesmo tamanho e de duas cores, brancos e cinzentos. Os quadrados brancos são usados para fazer a borda do tapete e os cinzentos formam um retângulo na parte de dentro. Qualquer quadrado branco está unido a exatamente dois outros quadrados brancos. A figura abaixo mostra um tapete  $6 \times 5$ .

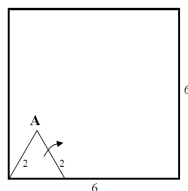


- i. Quantos quadradinhos cinzas tem um tapete  $m \times n$ ?
- ii. Um tapete é *equilibrado* quando o número de quadradinhos brancos é igual ao de cinzas. Mostre que um tapete  $m \times n$  é *equilibrado* se, e somente se,

$$\frac{mn}{(m-2)(n-2)} = 2.$$

- iii. Determine todos os valores de  $m$  e  $n$  para os quais um tapete  $m \times n$  é equilibrado.

4. Um triângulo equilátero de lado 2 é girado ao longo e dentro de um quadrado lado 6 até que o vértice  $A$  retorne a sua posição original, como mostrado abaixo. Determine o comprimento do caminho que o ponto  $A$  percorreu. Deixe sua resposta em termos de  $\pi$ .



5. Um conjunto de inteiros consecutivos é *equilibrado* se ele pode ser dividido em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos, de modo que:
- Os dois subconjuntos não tenham elementos em comum;
  - A soma dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;
  - A soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos quadrados dos elementos do outro.

Por exemplo, o conjunto  $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$  é *equilibrado*, pois podemos dividi-lo nos subconjuntos  $\{7, 10, 12, 13\}$  e  $\{8, 9, 11, 14\}$ , e  $7 + 10 + 12 + 13 = 8 + 9 + 11 + 14$  e também  $7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2$ .

- Verifique que o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  é *equilibrado*.
- Mostre que qualquer conjunto de oito naturais consecutivos é *equilibrado*.
- Mostre que nenhum conjunto de quatro naturais consecutivos é *equilibrado*.
- Mostre que se o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, N - 1, N\}$  é *equilibrado*, então qualquer conjunto de  $N$  números inteiros consecutivos é *equilibrado*.

6. Considere o número  $0,112358314\dots$  que é dado da seguinte forma: a partir do terceiro dígito depois da vírgula, o próximo dígito é o dígito da unidade da soma dos dois dígitos anteriores a ele. Esse número é racional ou irracional?

**BOA PROVA!**