1ª Olimpíada Paranaense de Matemática
Terceira Fase
Nível 3
12/11/16
Duração: 5 Horas

---

1. Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Suponha que P satisfaz

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

   i. Calcule os valores de a, b e c.

   ii. Usando a propriedade acima, calcule o valor da soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

   em função do valor $n \in \mathbb{N}$.

---

2. Mostre que os números $49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$, obtidos colocando-se 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.

---

3. A desigualdade de *Cauchy-Schwarz* diz que se temos dois conjuntos de números reais com mesma quantidade de elementos, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, \ldots, b_n\}$ então vale

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2,$$

e a igualdade é obtida se, e somente se, existir um número real λ tal que $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, $\ldots$, e $b_n = \lambda a_n$.

   i. Prove o resultado acima para o caso $n = 2$.

   ii. Sendo α e β valores de ângulos em graus com $0 < \alpha, \beta < 90°$ mostre que

$$\left(\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \beta} + \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{sen} \beta}\right) \cos(\alpha - \beta) \geq 1,$$

   e a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha = \beta$.

---

4. 2013 é o primeiro ano desde a idade Média que é formado por quatro dígitos consecutivos. Quantos anos deste tipo estão ainda por vir após 2013 e antes do ano 10.000?

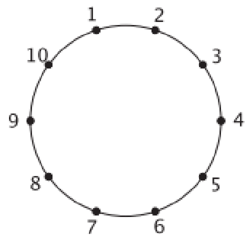
---

5. Encontre todas as soluções (x, y, z, t) com $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ do sistema abaixo

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

---

6. Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição



i. Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?

ii. Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um quadrilátero convexo no qual exatamente dois dos ângulos internos sejam retos?

iii. Se forem retiradas cinco bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um pentágono convexo que tenha o centro da circunferência em seu interior? **Obs.**: se o centro da circunferência pertence ao lado do pentágono, então ele não está no interior do pentágono.

BOA PROVA!