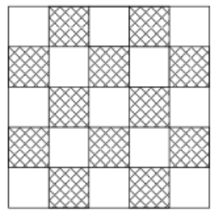
Olimpíada Paranaense de Matemática 2017
Segunda Fase
Nível 1
23/09/16
Duração: 4 horas e 30 minutos

1. Um "quadradófago" é um inseto que se alimenta de quadrados de tabuleiros de xadrez e dama. Um tabuleiro de tamanho 5×5 é mostrado abaixo



Quando um quadradófago começa a comer os quadrados de um tabuleiro ele sempre come um quadrado por vez. Sempre que há algum quadrado para ser comido ele segue em uma direção reta (ao longo de uma linha ou uma coluna) e não faz desvios, até que não haja mais quadrados na direção que está comendo. Se o quadradófago encontra a ponta do tabuleiro, ou um quadrado que já comeu, ele dá uma volta de um ângulo reto (ou no sentido anti horário ou no sentido horário) e continua a comer quadrados. Se ele chegar em um ponto que não possui quadrados para serem comidos, ele se dá por satisfeito, e não come mais nenhum quadrado.

a) Se um quadradófago começar no meio de um quadrado 7×7 qual é o número máximo de quadrados que o quadradófago pode comer?

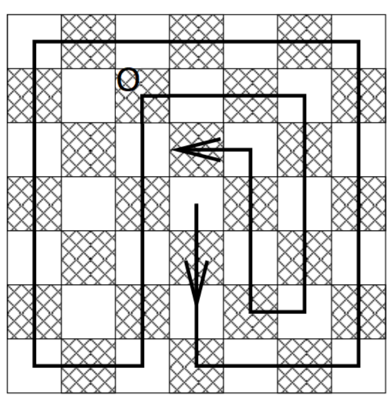
b) Desenhe um caminho feito pelo quadradófago começando no meio de um tabuleiro 7×7 de tal forma que ele coma o maior número de quadrados do tabuleiro.

c) Se um quadradófago cair aleatoriamente em um tabuleiro 13×13, em quais posições ele deve cair de modo a garantir que exista um caminho que possa comer todos os quadrados do tabuleiro?

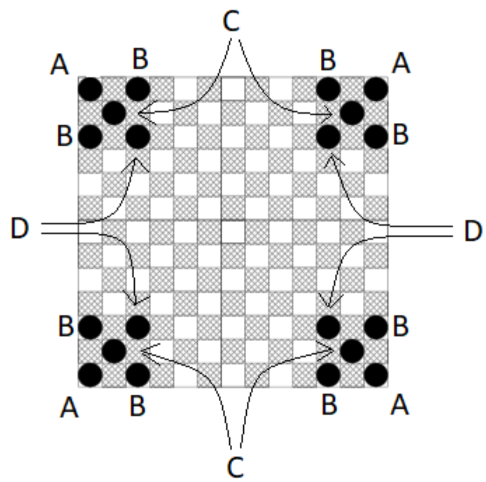
Solução:

a) Por inspeção temos que o número máximo a ser comido é 44. **(+3 pontos)**.

b) Um possível caminho é indicado na figura. **(+5 pontos)**



c) As possíveis posições estão indicadas na figura.



Critérios:

- Achou todas as posições **A**: **+2 pontos**
- Achou todas as posições **B**: **+2 pontos**
- Achou todas as posições **C**: **+4 pontos**
- Achou todas as posições **D**: **+4 pontos**
- Em cada caso, se apenas achou algumas e não todas as posições: metade dos pontos descritos acima.

2. Afonso, Carlos, Gabriel e José estão jogando futebol, cada um deles com um dos números 1, 2, 3, 4 nas costas da camiseta. Há duas equipes de dois jogadores, sendo uma delas formada por Carlos e pelo jogador com o número 3. Durante o jogo, o José exclama: "somando todos os números das camisetas que consigo ver, obtenho o mesmo número que multiplicando-os!". Afonso acrescenta: "somando todos os números que consigo ver, obtenho o dobro do número de gols que já marquei". Gabriel chuta e arremata: "Gol!".

   a) Qual é o número da camiseta de cada um dos jogadores?

   b) Sabendo que antes da fala de Gabriel, José não havia marcado nenhum gol e a partida estava empatada, e que logo após Gabriel arrematar o juiz apita o final da partida, qual das duplas ganhou o jogo e por quanto?

Solução:

a) Escrevendo na tabela as informações imediatas do enunciado temos

Equipe A		**Equipe B**	
Número	**Nome**	**Número**	**Nome**
?	Carlos	?	?
3	?	?	?

José não pode estar na equipe A pois, caso estivesse seria camisa 3 e a sua fala implica que $1+2+4=7$ seria igual à $1\times 2\times 4=8$, o que não ocorrer. Logo, José está na equipe B. Analisando as possibilidades de número de camisas de José, de acordo com sua fala, temos que a única possibilidade é que ele seja camisa de número 4. De acordo com a fala de Afonso, sua camisa não pode ser a 3, caso contrário $1+2+4=7$ seria o dobro de número de gols que marcou, mas 7 não é um número par. Logo o número de camisa do Afonso é 2 e ele está na equipe B. Sendo assim, Carlos tem camisa de número 1 e Gabriel está na equipe A com camisa de número 3. A tabela fica assim

Equipe A		**Equipe B**	
Número	**Nome**	**Número**	**Nome**
1	Carlos	4	José
3	Gabriel	2	Afonso

Critérios:

- Concluiu que José não está na equipe de Carlos: **+2 pontos**.
- Concluiu que José tem camisa de número 4: **+3 pontos**.
- Concluiu que Afonso está na equipe de José: **+3 pontos**.
- Concluiu que Afonso tem camisa de número 2: **+2 pontos**.
- Completou as informações que faltavam e concluiu o problema: **+2 pontos**.

b) Pela fala de Afonso temos que Afonso marcou 4 gols. Como José não marcou nenhum e o jogo estava empatado antes da fala de Afonso temos que as duas equipes estavam com 4 gols cada. Após o chute de Gabriel a equipe A fica com 5 gols e a partida acaba. Logo a equipe A ganhou o jogo contra a equipe B por 5 à 4.

Critérios:

- Concluiu que antes da fala de Gabriel o jogo estava empatado em 4 à 4: **+5 pontos**.
- Concluiu o problema: **+3 pontos**.

3. Amélia possui quatro irmãos, Bernardo, Carolina, Denis e Eduardo. O pai de Amélia distribuiu notas de dinheiro e moedas que tinha em sua carteira entre seus filhos em uma certa ordem. Nesta ordem Amélia foi a última a receber dinheiro. O pai distribuiu o dinheiro de modo que Amélia recebeu o dobro que primeiro, três vezes o que o segundo recebeu, quatro vezes o que o terceiro recebeu e cinco vezes o que o quarto recebeu. Bernardo reclamou que ganhou 30 reais a menos que Denis. Calcule todas as quantias possíveis que Amélia pode ter ganho de seu pai.

Solução:

Sejam as seguintes quantias

$$P_1 = \text{a quantia que o primeiro recebeu},$$
$$P_2 = \text{a quantia que o segundo recebeu},$$
$$P_3 = \text{a quantia que o terceiro recebeu},$$
$$P_4 = \text{a quantia que o quarto recebeu}.$$

Sejam também as quantias

$$A = \text{a quantia que Amélia recebeu},$$
$$B = \text{a quantia que Bernardo recebeu},$$
$$D = \text{a quantia que Denis recebeu}.$$

Pelo enunciado temos que

$$A = 2P_1 = 3P_2 = 4P_3 = 5P_4,$$

e dessa forma podemos concluir que $A > P_1 > P_2 > P_3 > P_4$. Ainda pelo enunciado temos que $B = D - 30$ logo $B < D$. Dessa forma as possibilidades das ordens do recebimento de dinheiro de Bernado e Denis são

Possibilidades	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
D	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_3
B	P_2	P_3	P_4	P_3	P_4	P_4

- **Caso 1:** Neste caso temos $P_1 = D$ $P_2 = B$, logo $A = 2D = 3B = 3(D - 30)$. Isto implica que $D = 90$ e $A = 180$.
- **Caso 2:** Neste caso temos $P_1 = D$ $P_3 = B$, logo $A = 2D = 4B = 4(D - 30)$. Isto implica que $D = 60$ e $A = 120$.
- **Caso 3:** Neste caso temos $P_1 = D$ $P_4 = B$, logo $A = 2D = 5B = 5(D - 30)$. Isto implica que $D = 50$ e $A = 100$.
- **Caso 4:** Neste caso temos $P_2 = D$ $P_3 = B$, logo $A = 3D = 4B = 4(D - 30)$. Isto implica que $D = 120$ e $A = 360$.
- **Caso 5:** Neste caso temos $P_2 = D$ $P_4 = B$, logo $A = 3D = 5B = 5(D - 30)$. Isto implica que $D = 75$ e $A = 225$.

- **Caso 6:** Neste caso temos $P_3 = D$ $P_4 = B$, logo $A = 4D = 5B = 5(D - 30)$. Isto implica que $D = 150$ e $A = 600$.

Como temos o valor que Amélia recebeu em cada uma das possibilidades, podemos determinar P_1, P_2, P_3 e P_4 em cada um dos casos. Isso nos leva a seguinte tabela

Possibilidades	**Caso 1**	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**	**Caso 5**	**Caso 6**
A	180	120	360	100	225	600
$\mathbf{P_1 = \frac{A}{2}}$	90	60	180	50	$112,5$	200
$\mathbf{P_2 = \frac{A}{3}}$	60	40	120	$33,33\ldots$	75	200
$\mathbf{P_3 = \frac{A}{4}}$	45	30	90	25	$56,25$	150
$\mathbf{P_4 = \frac{A}{5}}$	36	24	72	20	45	120

O caso 3 não pode ocorrer pois o pai não tem como pagar em notas de dinheiro e moedas o valor de $33,33\ldots$ para o filho que recebeu em segundo lugar. Logo as possíveis quantidades que Amélia pode ter recebido são: 180, 120, 360, 225 e 600.

Critérios:

- Concluiu que $A > P_1 > P_2 > P_3 > P_4$: **+3 pontos**.
- Concluiu que $B < D$: **+3 pontos**.
- Para cada caso acima ter achado o valor que Amélia recebeu: **+2 pontos**.
- Excluiu o caso 4 acima: **+2 pontos**.

4. Em uma tira larga de papel se escrevem os múltiplos de 21, começando com 21, sem espaços entre eles. Chega-se assim a uma sequência de dígitos que começa da seguinte forma:

$$21426384105126147\ldots$$

Ache o dígito que ocupa a posição 2017 desta sequência de dígitos e determine a que múltiplo de 21 pertence. (Por exemplo, o dígito da posição 15 é 1 e pertence ao múltiplo 147).

Solução:

Contando os dígitos de 21 nos casos abaixo temos:

- **2 dígitos:** os múltiplos de 21 com dois dígitos são

$$21, 42, 63, 84.$$

Assim temos 4 múltiplos de 2 dígitos cada. Então a quantidade de dígitos total neste caso é $4 \times 2 = 8$ números.

- **3 dígitos:** os múltiplos de 21 com três dígitos são

$$105, 126, \ldots, 987.$$

Como $105 = 21 \times 5$ e $987 = 21 \times 47$, temos 43 múltiplos de 3 dígitos cada. Então a quantidade de dígitos total neste caso é $43 \times 3 = 129$ números.

- **4 dígitos:** os múltiplos de 21 com quatro dígitos são

$$1.008, 1.029, \ldots, 9.996.$$

Como $1.008 = 21 \times 48$ e $9.996 = 21 \times 476$, temos 429 múltiplos de 4 dígitos cada. Então a quantidade de dígitos total neste caso é $429 \times 4 = 1.716$ números.

- **5 dígitos:** os múltiplos de 21 com cinco dígitos são

$$10.017, 10.038, \ldots, 99.981.$$

Como $10.017 = 21 \times 477$ e $99.981 = 21 \times 4.761$, temos 4.285 múltiplos de 5 dígitos cada. Então a quantidade de dígitos total neste caso é $4.285 \times 5 = 21.425$ números.

Com isso a quantidade total de dígitos de múltiplos do número 21 com até 4 dígitos é $8 + 129 + 1.716 = 1.853$. A quantidade total de dígitos de múltiplos do número 21 com até 5 dígitos é $8 + 129 + 1.716 + 21.425 = 23.278$. Logo o número escrito na posição 2.017 deve estar entre os múltiplos de 21 com 5 dígitos.

Subtraindo 2.017 de 1.853 (quantidade total de dígitos de múltiplos do número 21 com até 4 dígitos) temos $2.017 - 1.853 = 164$. Dividindo 164 por 5 obtemos quociente 32 e resto 4. Logo o dígito na posição 2017 estará no múltiplo $21 \times (476 + 33) = 10.689$. A posição

2017 da sequência será o quarto dígito da esquerda para a direita do número 10.689, logo a resposta é 8.

Critérios:

- Calculou corretamente a quantidade de múltiplos de 21 com 2 algarismos: **+ 1 ponto**
- Calculou corretamente a quantidade de múltiplos de 21 com 3 algarismos: **+ 3 pontos**
- Calculou corretamente a quantidade de múltiplos de 21 com 4 algarismos: **+ 3 pontos**
- Concluiu que o número na posição 2.017 está entre os múltiplos de 21 com 5 dígitos: **+7 pontos**
- Concluiu corretamente o problema: **+ 6 pontos**

5. Seja S o conjunto de todos os números naturais positivos menores ou iguais a 2017. Responda as perguntas abaixo:

   a) Seja R o conjunto dos números de S que podem ser escritos como a soma de dois números naturais positivos consecutivos. Quantos números tem R?

   b) Seja T o conjunto dos números de S que podem ser escritos como a soma de 5 números naturais positivos e consecutivos. Quantos números tem T?

   c) Quantos números estão simultaneamente em R e em T?

Solução:

a) Para r estar no conjunto R é necessário e suficiente que exista um número natural $a \geq 1$ tal que $r = a + (a + 1)$, o que é equivalente à $r = 2a + 1$, o que é equivalente a dizer que r úm número ímpar maior ou igual que 3. Logo como R é subconjunto de S, temos que o conjunto R é dado por todos os números naturais ímpares entre 3 e 2017. Logo, como a quantidade de números ímpares entre 1 e 2018 é a metade de 2018, isto é, 1.009, a quantidade de números em R é $1.009 - 1 = 1.008$.

Critérios:

- Concluiu que o conjunto R é constituído dos números ímpares entre 3 e 2.017: **+3 pontos**.
- Calculou de maneira correta a quantidade de números em R: **+3 pontos**.

b) Para t estar no conjunto T é necessário e suficiente que exista um número natural $b \geq 1$ tal que $r = b + (b + 1) + (b + 2) + (b + 3) + (b + 4)$, o que é equivalente à $r = 5b + 10 = 5(b + 2)$, o que é equivalente a dizer que r úm número múltiplo de 5 maior ou igual que 15. Logo como R é subconjunto de S, temos que o conjunto R é dado por todos os números múltiplos de 5 entre 15 e 2017. Logo, como a quantidade de números múltiplos de 5 entre 1 e 2017 é o quociente da divisão de 2017 por 5, que é igual à 403, e como temos 2 múltiplos de 5 entre 1 e 14, a quantidade de números em T é $403 - 2 = 401$.

Critérios:

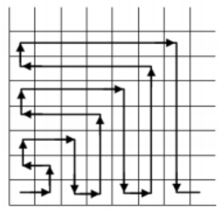
- Concluiu que o conjunto T é constituído dos números múltiplos de 5 entre 15 e 2.017: **+3 pontos**.
- Calculou de maneira correta a quantidade de números em T: **+3 pontos**.

c) Usando os itens anteriores basta calcularmos a quantidade de números ímpares no conjunto T. Note que os número do conjunto T são múltiplos de 5 maiores ou iguais que 15, e também que os múltiplos de 5 se alternam entre um número par e um número ímpar. Logo, como $2.010 = 5 \times 402$, temos $\frac{402}{5} = 201$ números ímpares e múltiplos de 5 entre 1 e 2.010. Descartando o número 5 temos 200 múltiplos de 5 ímpares entre 15 e 2.010. Logo, adicionando o múltiplo ímpar de 5, 2.015 chegamos à quantidade de números que estão simultaneamente em R e em T que é $200 + 1 = 201$.

Critérios:

- Concluiu que o conjunto de números comum em R e T é constituído dos números ímpares múltiplos de 5 entre 15 e 2.017: **+5 pontos**.
- Calculou de maneira correta a quantidade de números comuns em R e T: **+3 pontos**.

6. Joãozinho escreve números inteiros positivos num papel quadriculado com cada número ocupando uma casa do quadriculado, como indicam as figuras. As figuras são apenas uma indicação de como Joãozinho faz sua escrita, o papel quadriculado é muito maior que as figuras. Ele inicia da borda esquerda inferior e escreve os números seguindo o esquema abaixo. Observe que apenas os primeiros números estão indicados na 2ª figura. Os números são identificados pelas coordenadas (x, y), onde x é a ordem da coluna do número e y é a ordem da linha do número, adotando que o número está na 1ª coluna e na 1ª linha. Por exemplo, as coordenadas do número 1 são $(1, 1)$, enquanto que as do número 8 são $(3, 2)$.



17	···		
16	15	14	13
5	6	7	12
4	3	8	11
1	2	9	10

a) Quais as coordenadas do número 15?

b) Iniciando de $1, 9, \ldots$, os números da 1ª linha, de dois em dois, possuem uma característica em comum. Descreva essa característica. Justifique sua resposta.

c) A casa contendo o número 21 possui coordenadas $(5, 5)$. Determine qual é o número escrito na casa cujas coordenadas são $(6, 6)$ e o número da casa $(7, 7)$?

d) Qual é o número da casa $(20, 20)$?

e) Quais são as coordenadas da casa onde está escrito o número 2017?

Solução:

a) Por construção, as coordenadas do número 15 são $(2, 4)$ **(+1 ponto)**.

b) A característica em comum é que representam quadrados de números ímpares. A justificativa é pelo fato que, seguindo a escrita de Joãzinho e sendo n algum destes números, quando chegamos em n, os números anteriores à n ocupam cada quadradinho de mesmo comprimento de um quadrado maior de lado k, um número ímpar. Logo, como existem k^2 quadradinhos que dividimos e n é o último número que marcamos no quadrado de lado k, temos $n = k^2$.

Critérios:

- Identificou corretamente a característica: **+2 pontos**.
- Demonstrou corretamente porque a característica é verdadeira: **+3 pontos**.

c) Da mesma forma que obtivemos o resultado do item b) acima, temos que, iniciando de $4, 16, \ldots$, os números da primeira coluna, de dois em dois, possuem a característica de serem quadrados de números pares. Com isso é possível achar uma fórmula para calcular quais números irão cair nas diagonais, isto é, em coordenadas do tipo (m, m). Seja h o número que corresponde a uma coordenada do tipo (m, m). Observe que se estamos em uma coordenada (m, m), com m um número ímpar, então se andarmos para baixo, seguindo a mesma coluna até chegar no último quadradinho, teremos que andar $m - 1$ quadradinhos e chegaremos na coordenada $(m, 1)$. Pelo item b) acima, a coordenada $(m, 1)$ corresponde ao número m^2. Logo teremos que $h + m - 1 = m^2$, ou seja, $h = m^2 - m + 1$. Analogamente teremos o mesmo resultado se estivermos em uma coordenada (m, m) com m sendo um número par.

Aplicando esta fórmula nos casos pedidos temos

- O número h que corresponde à coordenada $(6, 6)$ é $h = 6^2 - 6 + 1 = 31$.
- O número h que corresponde à coordenada $(7, 7)$ é $h = 7^2 - 7 + 1 = 43$.

d) Pela dedução acima o número h que corresponde à coordenada $(20, 20)$ é $h = 20^2 - 20 + 1 = 381$.

Critérios para os itens c) e d):

- Achou alguma fórmula ou padrão que caracterize as diagonais com as respectivas coordenadas: **+2 pontos**.
- Demonstrou porque a fórmula ou padrão é verdadeiro: **+2 pontos**.
- Calculou corretamente o número h correspondendo à $(6, 6)$: **+2 pontos**
- Calculou corretamente o número h correspondendo à $(7, 7)$: **+2 pontos**
- Calculou corretamente o número h correspondendo à $(20, 20)$: **+2 pontos**

e) O quadrado prefeito que vem logo após do número 2.017 é $2.025 = 45 \times 45$. O número 2.025 é quadrado do número ímpar 45, logo possui coordenadas $(45, 1)$. Sendo assim, voltando pra cima na mesma coluna no caminho que Joãzinho faz, andando 8 quadrados para cima, chegamos no número 2.017, que vai possuir coordenadas $(45, 9)$ **(+4 pontos)**.