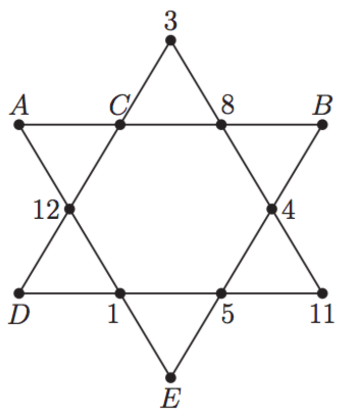
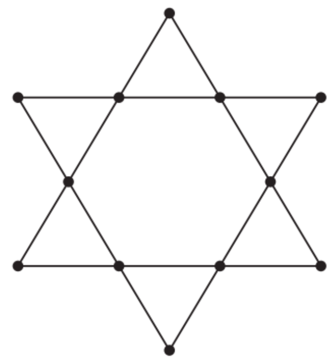
OPRM - 2018
2a Fase
Nível 1
01/09/18
Duração: 4 horas

1. Augusto propõe ao seu amigo o seguinte desafio: na figura abaixo, os números naturais de 1 a 12 são escritos de forma que a soma de quatro números em uma linha reta é a mesma para todas as linhas. Alguns números foram substituídos pelas letras A, B, C, D e E.





a) Encontre os números correspondentes para as respectivas letras.

b) Em uma figura similar, disponha os números ímpares 1, 3, ..., 23 para que a soma dos quatro números seja igual novamente em cada uma das seis linhas retas.

Solução:

a) Note que há uma linha reta com os quatro números explícitos, a saber, aquela que contém os números 3, 8, 4 e 11. Uma vez que $3+8+4+11 = 26$, cada linha reta deverá somar 26. Dessa forma,

- $D+1+5+11 = 26$, o que nos garante que $D = 9$;
- $D+12+C+3 = 26$, ou ainda, $9+12+C+3 = 26$, devido à observação anterior. Assim, $C = 2$.

As demais linhas retas nos fornecem as equações: $A+E+13 = 26$, $A+B+10 = 26$ e $B+E+9 = 26$. Temos, portanto, o seguinte sistema de equações com três incógnitas a serem determinadas:

$$\begin{cases} A+E &= 13 \quad (1) \\ A+B &= 16 \quad (2) \\ B+E &= 17 \quad (3) \end{cases}$$

Ao subtrairmos a equação (1) de (2), obtemos $B-E = 3$. Somando essa nova equação a (3), concluímos que $2B = 20$, ou seja, $B = 10$. Neste caso, das equações (2) e (3) obtemos que $A = 6$ e $E = 7$.

Critérios:

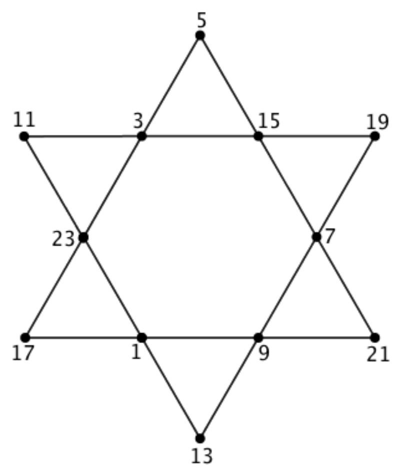
- Observar que a soma entre os números de uma mesma linha reta é igual a 26: **+2 pontos**
- Determinar o número correspondente à letra D: **+2 pontos**

- Determinar o número correspondente à letra C : **+2 pontos**
- Estabelecer o sistema de três equações com incógnitas A, B e E: **+2 pontos**
- Resolver corretamente o sistema: **+5 pontos**

b) A disposição dos números ímpares entre 1 e 23 pode ser feita como na figura abaixo.

Critério:

- Obter uma disposição possível: **+7 pontos**



2. João, Pedro e Gustavo são trigêmeos idênticos. Não é possível distingui-los somente pela aparência. João e Pedro sempre falam a verdade, mas Gustavo sempre mente – tudo o que ele fala é mentira. Sabemos que eles têm idade entre 20 e 30 anos, 20 e 30 inclusos. Certo dia, quando perguntados sobre suas idades, um deles diz: temos entre 20 e 29 anos, com 20 e 29 inclusos. Outro responde: temos entre 21 e 30 anos, com 21 e 30 inclusos, e um de nós dois está mentindo. Qual é a idade dos trigêmeos?

Solução:

Suponha que a afirmação

"temos entre 21 *e* 30 *anos, com* 21 *e* 30 *inclusos, e um de nós está mentindo"*,

feita pelo segundo irmão a responder, seja falsa. Nessa situação, o segundo irmão é o Gustavo, uma vez que João e Pedro só falam a verdade. Como tudo o que Gustavo diz é mentira, a afirmação

"e um de nós está mentindo"

é falsa, isto é, nenhum dos dois irmãos está mentindo. Isso nos leva a um absurdo, uma vez que estamos assumindo que o segundo irmão é o Gustavo, que sempre mente.

Como consequência, temos necessariamente que a afirmação

"temos entre 21 *e* 30 *anos, com* 21 *e* 30 *inclusos, e um de nós está mentindo"*,

é verdadeira. O primeiro irmão a responder é, portanto, o Gustavo, isto é, a afirmação

"temos entre 20 *e* 29 *anos, com* 20 *e* 29 *inclusos"*

é falsa, já que um dos irmãos está mentindo e estamos assumindo que não é o segundo a responder. Dessa forma, concluímos que a idade dos irmãos é 30 anos.

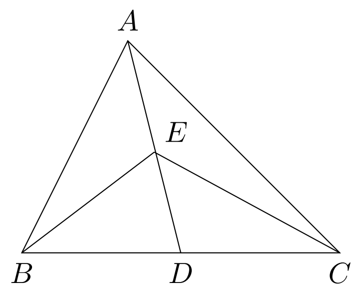
Critérios:

- Concluir que a afirmação feita pelo segundo irmão a responder não pode ser falsa: **+10 pontos**
- Obter a resposta correta: **+10 pontos**

Critério alternativo:

- Assumir que a afirmação feita pelo primeiro irmão a responder é falsa e que a afirmação feita pelo segundo irmão é verdadeira e não obter nenhum absurdo, concluindo a resposta: **+20 pontos**

3. Em um triângulo ABC de área 1, considere D o ponto médio do segmento de reta BC e E o ponto médio de AD, como na figura abaixo.



a) Determine as áreas dos triângulos BED e CED.

b) Nas condições acima, sejam ainda F o ponto médio de BE e G o ponto médio de CF. Calcule a área do triângulo EFG.

Solução:

a) Como D é o ponto médio do segmento de reta BC, os triângulos ABD e ADC têm áreas iguais à metade da área do triângulo ABC, ou seja:

$$\text{área de } ABD = \frac{1}{2} \text{ e área de } ADC = \frac{1}{2}.$$

Agora, como E é o ponto médio do segmento de reta AD, a área do triângulo BED é igual à metade da área de ABD, e a área do triângulo CED é igual à metade da área de ADC, isto é:

$$\text{área de } BED = \frac{1}{4} \text{ e área de } CED = \frac{1}{4}.$$

Critérios:

- Calcular corretamente as áreas dos triângulos ABD e ADC: **+4 pontos**
- Calcular corretamente as áreas dos triângulos BED e CED: **+4 pontos**

b) Pelo item anterior, a área do triângulo BEC é a soma das áreas de BED e CED, ou seja, é igual a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Sendo F o ponto médio do segmento de reta BE, a área do triângulo CFE é igual à metade da área de BEC, isto é:

$$\text{área de } CFE = \frac{1}{4}.$$

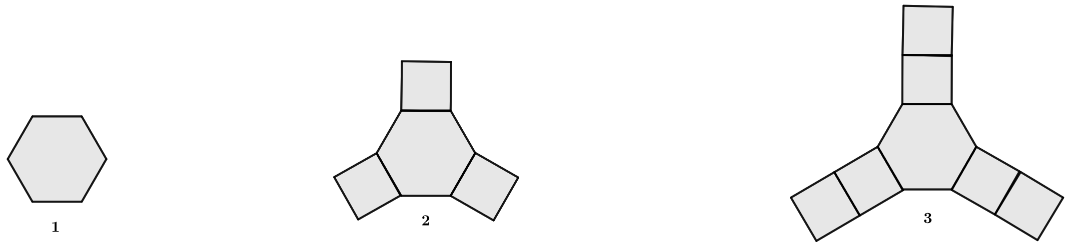
Finalmente, como G é o ponto médio de CF, a área do triângulo EFG é a metade da área de CFE, ou ainda:

$$\text{área de } EFG = \frac{1}{8}.$$

Critérios:

- Observar que a área do triângulo BEC pode ser obtida através da soma das áreas de BED e CED: **+6 pontos**
- Calcular corretamente a área do triângulo CFE: **+3 pontos**
- Calcular corretamente a área do triângulo EFG: **+3 pontos**

4. Usando apenas hexágonos e quadrados, Gabriel construiu as seguintes figuras:



Observe que para construir a figura de número **1** Gabriel usou somente um polígono, o hexágono. Já para a de número **2**, foram usados 4 polígonos – um hexágono e três quadrados –, e para a de número **3**, 7 polígonos – um hexágono e seis quadrados.

a) Se seguirmos o padrão de construção estabelecido por Gabriel, quantos polígonos usaremos para construir a figura de número **10**?

b) Dê uma fórmula que expresse quantos polígonos serão necessários para construir a figura de número **n**.

Solução:

1. Observe que para construir a figura de número **1**, foram usados um hexágono e zero quadrados: $1+0\times 3$ polígonos. Já para a de número **2**, foram usados um hexágono e três quadrados: $1+1\times 3$ polígonos. Para a de número **3**, foram usados um hexágono e seis quadrados: $1+2\times 3$ polígonos. A quantidade de polígonos usados para construir a figura de número **10** será, portanto, igual a $1+9\times 3 = 28$, dentre eles um hexágono e 27 quadrados.

   Critérios:

   - Observar que a cada construção são adicionados 3 polígonos: **+3 pontos**
   - Calcular 28 polígonos na figura de número **10**: **+4 pontos**

2. Tendo em vista o item anterior, o número de polígonos usados para construir a figura de número **n** será $1 + (\mathbf{n}-1) \times 3 = 3\mathbf{n} - 2$.

   Critério:

   - Obter a fórmula correta: **+12 pontos**

5. Cinco símbolos ◯ e quatro símbolos ★ são dispostos no tabuleiro abaixo de forma que cada número é coberto ou por um ◯ ou por um ★.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

a) De quantas maneiras diferentes os ◯'s e os ★'s podem ser dispostos?

b) Quantas entre estas maneiras contêm uma linha com três ★'s e nenhuma linha com três ◯'s? *Esclarecimento: um linha contendo três símbolos pode ser horizontal, vertical ou uma das diagonais* $1-5-9$ *e* $3-5-7$.

Solução:

a) Das 9 posições do tabuleiro, precisamos escolher 5 para colocar o símbolo ◯, ou equivalentemente, escolher 4 posições para colocar o símbolo ★. As maneiras diferentes de dispor os ◯'s e os ★'s no tabuleiro são, portanto, contadas através da combinação $\binom{9}{5}$, ou ainda, da combinação $\binom{9}{4}$.

Temos que $\binom{9}{5} = \dfrac{9!}{(9-5)!5!} = 126$. Dessa forma, existem 126 maneiras diferentes.

Critério:

- Concluir que existem 126 maneiras diferentes: **+8 pontos**

Critério alternativo:

- Observar que é necessário calcular $\binom{9}{5}$ ou $\binom{9}{4}$, mas não acertar o resultado final: **+6 pontos**

b) Observe, inicialmente, que três símbolos ★'s devem ocupar uma das diagonais para que nenhuma linha contenha três símbolos ◯'s. Por exemplo, se três ★'s ocuparem a primeira linha do tabuleiro, teremos uma entre as seguintes situações:

★	★	★
★	◯	◯
◯	◯	◯

★	★	★
◯	★	◯
◯	◯	◯

★	★	★
◯	◯	★
◯	◯	◯

★	★	★
◯	◯	◯
★	◯	◯

★	★	★
◯	◯	◯
◯	★	◯

★	★	★
◯	◯	◯
◯	◯	★

Cada uma delas não pode ocorrer, já que admite uma linha com três ◯'s.

Assuma, então, que três ★'s ocupam a diagonal $1-5-9$. O quarto símbolo ★ poderá ser disposto em qualquer uma das 6 posições restantes, sem que nenhuma linha com três ◯'s seja formada.

★	2	3
4	★	6
7	8	★

Da mesma forma, se três ★'s ocuparem a diagonal $3-5-7$, o quarto símbolo ★ também poderá ser disposto em qualquer uma das 6 posições restantes.

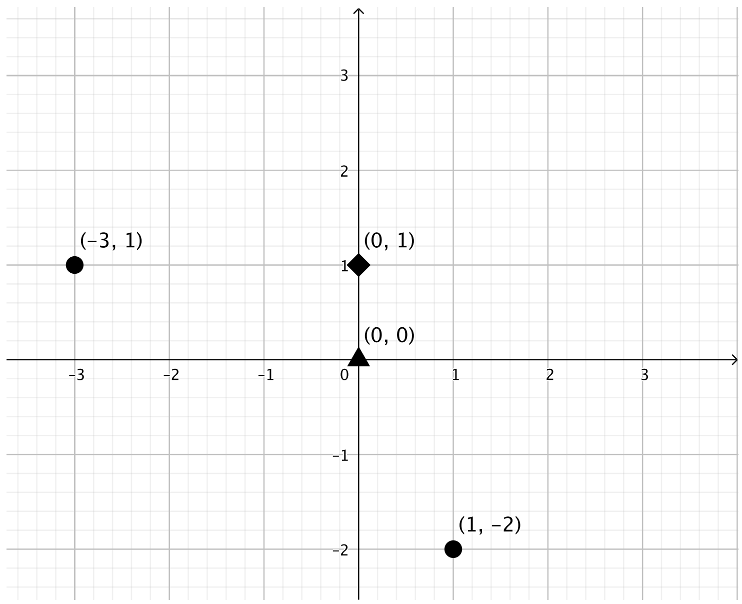
1	2	★
4	★	6
★	8	9

Temos, portanto, $6+6=12$ maneiras.

Critérios:

- Observar que três símbolos $\bigstar$'s não podem ocupar uma linha horizontal ou vertical sem que uma linha com três símbolos $\bigcirc$'s seja formada: **+6 pontos**
- Garantir que existem 12 maneiras de dispor os símbolos: **+6 pontos**

6. Aos pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano foram atribuídas figuras geométricas seguindo a regra: a dois pontos (x, y) e (z, w) são atribuídas a mesma figura geométrica se, e somente se, $x - z$ é múltiplo de 2 e $y - w$ é múltiplo de 3. Por exemplo, a mesma figura geométrica deve ser atribuída aos pontos $(-3, 1)$ e $(1, -2)$, já que $-3 - 1 = -4 = 2 \cdot (-2)$ e $1 - (-2) = 3 = 3 \cdot 1$. No entanto, figuras geométricas diferentes devem ser atribuídas aos pontos $(-3, 1)$ e $(0, 1)$, pois $-3 - 0 = -3$ não é múltiplo de 2.



a) Na figura acima, atribuímos ao ponto $(0, 0)$ um triângulo. Determine os pontos aos quais também foi atribuído um triângulo.

b) Quantas figuras geométricas diferentes foram usadas para cobrir todos os pontos do plano?

c) Para cada figura geométrica usada, considere todos os pontos aos quais ela foi atribuída e encontre dentre eles o que está mais próximo de $(0, 0)$.

d) Para cada ponto (x, y), vamos denotar por $\overline{(x, y)}$ o conjunto dos pontos aos quais foram atribuídas a mesma figura geométrica atribuída a (x, y). Considere a seguinte multiplicação

$$\overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)} = \overline{(xz, yw)}.$$

Por exemplo, $\overline{(1, 2)} \cdot \overline{(2, 4)} = \overline{(2, 8)}$ e $\overline{(2, 8)} = \overline{(0, 2)}$, já que a $(2, 8)$ e $(0, 2)$ foram atribuídas a mesma figura geométrica.

Dê um exemplo de dois conjuntos $\overline{(x, y)}$ e $\overline{(z, w)}$ aos quais foram atribuídas figuras geométricas diferentes daquela atribuída aos pontos do conjunto $\overline{(0, 0)}$ tais que $\overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)} = \overline{(0, 0)}$.

Solução:

a) Ao ponto (x, y) é atribuído um triângulo se $x - 0$ é um múltiplo de 2 e $y - 0$ é um múltiplo de 3. Neste caso, devem existir números inteiros k e ℓ tais que $x = 2 \cdot k$ e $y = 3 \cdot \ell$ e, portanto, $(x, y) = (2 \cdot k, 3 \cdot \ell)$. Assim, alguns pontos aos quais é atribuído um triângulo são

$$\ldots, (-2, -3), (-2, 0), (-2, 3), (0, -3), (0, 3), (2, -3), (2, 0), (2, 3), \ldots$$

Critério:

- Dar a resposta $(2 \cdot k, 3 \cdot \ell)$, com k e ℓ números inteiros, ou listar pelo menos três pares dessa forma: **+3 pontos**

b) Considere (x, y) um ponto qualquer do plano com coordenadas inteiras. Observe que a divisão de x por 2 pode somente ter resto igual a 0 ou 1. Já a divisão de y por 3 pode ter resto igual a 0, 1 ou 2. Temos, portanto, as seguintes possibilidades:

- os restos das divisões serem iguais a 0: neste caso, ao ponto (x, y) é atribuído um triângulo, uma vez que $x - 0$ é múltiplo de 2 e $y - 0$ é múltiplo de 3.
- o resto da divisão de x por 2 ser igual a 0 e o resto da divisão de y por 3 ser igual a 1: nessa situação, ao ponto (x, y) é atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(0, 1)$, pois $x - 0$ é múltiplo de 2 e $y - 1$ é múltiplo de 3.
- o resto da divisão de x por 2 ser igual a 0 e o resto da divisão de y por 3 ser igual a 2: neste caso, a (x, y) e $(0, 2)$ é atribuída a mesma figura geométrica, pois $x - 0$ é múltiplo de 2 e $y - 2$ é múltiplo de 3.
- o resto da divisão de x por 2 ser igual a 1 e o resto da divisão de y por 3 ser igual a 0: nessa situação, ao ponto (x, y) é atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(1, 0)$, uma vez que $x - 1$ é múltiplo de 2 e $y - 0$ é múltiplo de 3.
- o resto da divisão de x por 2 ser igual a 1 e o resto da divisão de y por 3 ser igual a 1: nesse caso, a (x, y) e $(1, 1)$ é atribuída a mesma figura geométrica, já que $x - 1$ é múltiplo de 2 e $y - 1$ é múltiplo de 3.
- o resto da divisão de x por 2 ser igual a 1 e o resto da divisão de y por 3 ser igual a 2: nessa situação, a (x, y) e $(1, 2)$ é atribuída a mesma figura geométrica, pois $x - 1$ é múltiplo de 2 e $y - 2$ é múltiplo de 3.

Dessa forma, as figuras geométricas usadas são aquelas atribuídas aos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 2)$; a cada um dos demais pontos do plano com coordenadas inteiras é também atribuída uma entre essas seis figuras, devido à discussão feita acima. São necessárias, então, seis figuras para cobrirmos todos os pontos do plano.

Critérios:

- Observar que é necessário analisar os restos das divisões por 2 e 3: **+2 pontos**

- Justificar a necessidade de cada uma entre as seis figuras geométricas: **+1 ponto cada, totalizando +6**

c)

- É claro que dentre todos os pontos aos quais atribuímos um triângulo, o que está mais próximo de $(0,0)$ é $(0,0)$.
- Os pontos do plano aos quais foi atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(0,1)$ são da forma $(2\cdot k, 3\cdot \ell+1)$, em que k e ℓ percorrem o conjunto dos números inteiros, ou seja:

  $$\ldots,(0,-2),(0,1),(0,4),\ldots,(2,-2),(2,1),(2,4),\ldots$$

  Como a menor distância possível ao ponto $(0,0)$ é 1 e $(0,1)$ tem distância 1 a $(0,0)$, concluímos que $(0,1)$ é o ponto mais próximo de $(0,0)$ entre os pontos da lista acima.
- Os pontos do plano aos quais foi atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(0,2)$ são da forma $(2\cdot k, 3\cdot \ell+2)$, em que k e ℓ percorrem o conjunto dos números inteiros. Alguns desses pares são:

  $$\ldots,(-2,-1),(-2,2),(-2,5),(0,-1),(0,2),(0,5),(2,-1),(2,2),(2,5),\ldots$$

  O ponto com menor distância a $(0,0)$ é $(0,-1)$, que dista 1 de $(0,0)$.
- Entre os pontos do plano aos quais foi atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(1,0)$, o mais próximo de $(0,0)$ é o próprio $(1,0)$, uma vez que sua distância a $(0,0)$ é 1.
- Os pontos do plano aos quais foi atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(1,1)$ são da forma $(2\cdot k+1, 3\cdot \ell+1)$, em que k e ℓ percorrem o conjunto dos números inteiros. Alguns desses pares são:

  $$\ldots,(-1,-2),(-1,1),(-1,4),(1,-2),(1,1),(1,4),(3,-2),(3,1),(3,4),\ldots$$

  Os pontos com menor distância a $(0,0)$ são $(-1,1)$ e $(1,1)$, que distam a diagonal de um quadrado de lado 1 de $(0,0)$.
- Os pontos do plano aos quais foi atribuída a mesma figura geométrica atribuída a $(1,2)$ são da forma $(2\cdot k+1, 3\cdot \ell+2)$, em que k e ℓ percorrem o conjunto dos números inteiros. Alguns desses pares são:

  $$\ldots,(-1,-1),(-1,2),(-1,5),(1,-1),(1,2),(1,5),(3,-1),(3,2),(3,5),\ldots$$

  Os pontos com menor distância a $(0,0)$ são $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, que distam a diagonal de um quadrado de lado 1 de $(0,0)$.

Critério:

- Obter para cada figura geométrica (exceto o triângulo) o par mais próximo de $(0,0)$ ao qual ela está atribuída: **+1 ponto cada, totalizando +5 pontos** *d*) Considere os conjuntos $\overline{(1,2)}$ e $\overline{(2,3)}$. De acordo com a definição de multiplicação, $\overline{(1,2)} \cdot \overline{(2,3)} = \overline{(2,6)}$. Agora, como $2-0$ é múltiplo de 2 e $6-0$ é múltiplo de 3, ao ponto $(2,6)$ foi atribuído um triângulo; logo, $\overline{(2,6)} = \overline{(0,0)}$.

Critério:

- Apresentar um exemplo correto: **+4 pontos**