1. Considere os números de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, onde cada termo na sequência é a soma dos dois termos anteriores. O ano mais próximo de 2018 que é número de Fibonacci foi o ano de 1597. Qual é o próximo ano que é número de Fibonacci? Qual número de Fibonacci está mais próximo de 100000?

Solução:

Somando-se os dois termos anteriores sucessivamente obtemos a seqüência: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393$.

Dessa forma, 2584 é o próximo ano número de Fibonacci. Como $|100000 - 75025| = 24975$ e $|121393 - 100000| = 21393$, temos que 121393 é o número de Fibonacci mais próximo de 100000.

Critérios:

- Acertou que 2584 é o Fibonacci mais próximo de 2018: **+8 pontos**
- Escreveu corretamente todos os números de Fibonacci até 121393: **+8 pontos**
- Verificou que 121393 é o mais próximo de 100000: **+4 pontos**

2. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas:

   a) A soma dos quadrados de dois inteiros consecutivos é um múltiplo de 4.

   b) A soma dos cubos de três inteiros consecutivos é um múltiplo de 9.

   c) A soma das quintas potências de cinco inteiros consecutivos é um múltiplo de 25.

Solução:

a) FALSA, por exemplo $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \equiv 1 \mod 4$.

Critérios:

- Achou um contraexemplo: **+2 pontos**

b) VERDADEIRA: Considere os três inteiros consecutivos $a - 1$, a e $a + 1$, logo usando que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a soma de seus cubos é

$$\begin{aligned}(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 &= (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + a^3 + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1)\\ &= 3a^3 + 6a\\ &= 3a(a^2 + 2)\end{aligned}$$

Se a for múltiplo de 3 então o resultado segue, caso contrário segue do Teorema de Euler que $a^2 \equiv 1(\mod 3)$ assim $a^2 + 2 \equiv 0 \mod 3$ e o resultado segue.

Critérios:

- Calcula corretamente a soma dos cubos: **+3 pontos**
- Utiliza corretamente o Teorema de Euler: **+4 pontos**
- Utiliza o Teorema de Euler mas não observou a hipótese de $a \not\equiv 0 \mod 3$: **+3 pontos**
- Conclui corretamente **+1 pontos**

c) VERDADEIRA. Usando que $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, considere a soma das potências quintas dos cinco números consecutivos

$$(a - 2)^5 + (a - 1)^5 + a^5 + (a + 1)^5 + (a + 2)^5 = 5a(a^4 + 20a^2 + 34)$$

Usando congruências temos que

$$a^4 + 20a + 34 \equiv a^4 - 1(\mod 5),$$

assim se a não é múltiplo de 5, então segue do Teorema de Euler que $a^4 \equiv 1 \mod 5$ ou seja $a^4 - 1 \equiv 0 \mod 5$ portanto $a^4 + 20a + 34$ é múltiplo de 5 e o resultado segue.

Critérios:

- Calcula corretamente a soma das potências quintas: **+4 pontos**
- Utiliza corretamente o Teorema de Euler: **+5 pontos**
- Utiliza o Teorema de Euler mas não observou a hipótese de $a \not\equiv 0 \mod 5$: **+4 pontos**
- Conclui corretamente **+1 pontos**

3. O resultado do sorteio da Mega-Sena do dia 23 de junho de 2018 foi o primeiro dentre todos os 2052 concursos já realizados no qual todos os números sorteados começaram com o mesmo algarismo: 50 – 51 – 56 – 57 – 58 – 59. Algumas pessoas alegaram que isso era uma prova que o sorteio havia sido manipulado e chegaram a classificar o sorteio como fraude, roubo e até viram o fato como sinal de corrupção.

   Por outro lado, muitos jogadores também evitam marcar números consecutivos, pensando que isso diminua a probabilidade de ganhar o prêmio, mas nesse concurso da Mega-Sena foram sorteados 4 números consecutivos.

   Suponha que os 6 números sorteados na Mega-Sena variam de 0 até 59.

   a) Qual a probabilidade que em 2052 sorteios nunca sejam sorteados 6 números começando com o mesmo algarismo? (Considere 0 como um possível valor para este algarismo, por exemplo, os números $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ têm todos primeiro algarismo 0).

   b) Qual a probabilidade que dentre os 6 números sorteados, a maior sequência de números consecutivos tenha comprimento 4?

Solução:

a) Primeiro calcularemos a probabilidade de que os 6 números começem com o mesmo algarismo. Contamos de quantas formas isso pode ocorrer: pelo principio multiplicativo temos 6 modos de escolher o dígito inicial e $C(10, 6)$ formas de escolher os 6 dígitos finais. Por outro lado, existem $C(60, 6)$ formas de escolher 6 números de 0 a 59. Assim a probabilidade de sortearmos 6 números começando com o mesmo algarismo é

$$P = \frac{6 \cdot C(10,6)}{C(60,6)}.$$

Logo a probabilidade de sortearmos 6 números que não comecem com o mesmo algarismo é $1 - P$. Como os sorteios são independentes em 2052 sorteios a probabilidade é

$$\left(1 - \frac{6 \cdot C(10,6)}{C(60,6)}\right)^{2052} \simeq 0.949666$$

Critérios:

- Calcula corretamente a probabilidade P: **+4 pontos**
- Observa que os sorteios são independentes: **+1 pontos**
- Conclui corretamente: **+2 pontos**

b) São sorteados 6 números de 60 e queremos 4 consecutivos. Devemos analisar duas possíveis situações: sortear 4 números consecutivos + 2 números consecutivos ou sortear 4 números consecutivos + 2 números **não** consecutivos. Se denotarmos os números "escolhidos" por círculos preenchidos e os “não escolhidos” por círculos vazios, temos:

i) Situação $(4+2)$: ○ ○ ● ● ● ● ○ ● ●○

ii) Situação $(4+1+1)$: ○ ● ● ● ● ○ ● ○ ●○

O número de círculos não preenchidos mostrado é ilustrativo. Existem $60-6=54$ círculos não preenchidos, com 55 espaços entre eles (incluindo os dois extremos) onde podemos colocar os escolhidos. No caso (a) devemos escolher 2 desses espaços para colocar os $(4+2)$ escolhidos, temos então 55 possibilidades para colocar o bloco de 4 e logo 54 possibilidades para colocar o bloco de 2: $55 \cdot 54$.

No caso (b) devemos escolher 3 desses espaços para colocar os $(4+1+1)$ escolhidos, temos então 55 possibilidades para colocar o bloco de 4, 54 para colocar um bloco de 1 e 53 para colocar o outro bloco de 1. Como os dois blocos de 1 são indistinguíveis permutar suas posições não altera o resultado, logo temos $\frac{55 \cdot 54 \cdot 53}{2}$. Dessa forma temos que o número de sequências de 6 números com exatamente 4 consecutivos é: $55 \cdot 54 + \frac{55 \cdot 54 \cdot 53}{2} = 81675$

Finalmente, temos que a probabilidade é dada por $\frac{81675}{C(60,6)} \simeq 0.00163142$

Critérios:

- Percebe que tem duas situações $(4+2)$ e $(4++1+1)$: **+2 pontos**
- Calcula corretamente o número de sequências do tipo $(4+2)$: **+4 pontos**
- Calcula corretamente o número de sequências do tipo $(4+1+1)$: **+5 pontos**
- Faz o raciocínio do número de sequências do tipo $(4+1+1)$ sem considerar que os blocos de 1 são indistinguíveis: **+1 pontos**
- Conclui corretamente: **+2 pontos**

4. Suponha que $P(x), Q(x), R(x)$ e $S(x)$ são polinômios tais que

$$P(x^5) + x\left[Q(x^5-1) - S(x)\right] + x^2\left[R(2019 - x^5) - S(x)\right] - x^3S(x) = (1+x^4)S(x).$$

a) Prove que existe um número complexo $z \neq 1$ tal que $z^5 = 1$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq n \leq 4$ tem-se

$$P(1) + z^nQ(0) + z^{2n}R(2018) = 0$$

b) Prove que se $z \neq 1$ e $z^5 = 1$, então o determinante abaixo é diferente de zero.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z^2 & z^3 \\ z^2 & z^4 & z^6 \end{pmatrix} = z^8 - 2z^7 + 2z^5 - z^4$$

c) Conclua que $1, 0$ e 2018 são raízes de $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente.

Solução:

a) Podemos escrever a igualdade como sendo

$$P(x^5) + xQ(x^5-1) + x^2R(2019-x^5) = (1+x+x^2+x^3+x^4)S(x).$$

Segue de $(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4) = x^5 - 1$, que $1+x+x^2+x^3+x^4$ tem quatro raízes complexas que são as raízes quintas da unidade (exceto 1) as quais podemos expressar como z, z^2, z^3, z^4, sendo z um número complexo diferente de 1 e tal que $z^5 = 1$. Logo fazendo $x = z, z^2, z^3, z^4$ temos

$$\begin{aligned} P(1) + zQ(0) + z^2R(2018) &= 0 \\ P(1) + z^2Q(0) + z^4R(2018) &= 0 \\ P(1) + z^3Q(0) + z^6R(2018) &= 0 \\ P(1) + z^4Q(0) + z^8R(2018) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Critérios:

- Conclui corretamente que z deve ser uma raiz quinta da unidade (exceto 1): **+3 pontos**
- Monta o sistema: **+2 pontos**

b) Observe que $z^8 - 2z^7 + 2z^5 - z^4 = z^4(z-1)^3(z+1)$ e, sendo z uma raiz quinta da unidade, temos que $z^4 \neq 0$, alem disso $z \neq 1$ assim $(z-1)^3 \neq 0$ e se fosse $z + 1 = 0$ então $z = -1$ o que implica $z^2 = 1$, contradição. Logo o determinante é diferente de zero.

Critérios:

- Fatora corretamente o polinômio: **+4 pontos**
- Conclui corretamente que cada fator é diferente de zero: **+3 pontos**

c) Podemos interpretar (1) como um sistema de quatro equações lineais com três incógnitas: $P(1)$, $Q(0)$ e $R(2018)$. A matriz de coeficientes do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z^4 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 \end{pmatrix}.$$

Eliminando a última linha, o determinante da matriz 3×3 resultante é exatamente $z^8 - 2z^7 + 2z^5 - z^4$, que sabemos que é não nulo pelo item *b*). Logo a matriz A tem posto 3 e, por tanto, o sistema tem uma única solução, a trivial $P(1) = Q(0) = R(2018) = 0$.

Critérios:

- Reconhece (1) como um sistema com matriz A: **+4 pontos**
- Conclui corretamente pelo item *b*) que o sistema só tem a solução trivial: **+4 pontos**

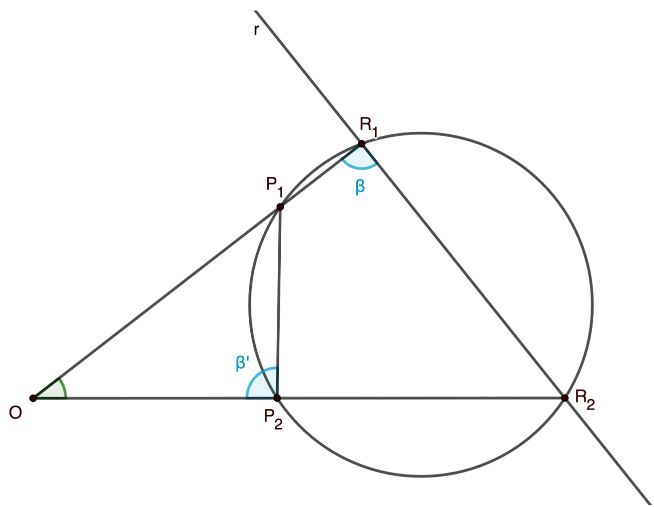
5. Seja O um ponto no plano e $\mathbf{r}$ uma reta que não contém O. Considere o lugar geométrico formado pelos pontos P para os quais $\overrightarrow{OP}$ intersecta $\mathbf{r}$ em R e $|OP| \cdot |OR| = 1$.

   a) Sejam P_1 e P_2 dois pontos no lugar geométrico tais que $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$ intersectam $\mathbf{r}$ em R_1 e R_2 respectivamente. Prove que o quadrilátero $R_1P_1P_2R_2$ é inscritível, ou seja, existe uma circunferência que passa por seus vértices.

   b) Se P_1, P_2, P_3 são pontos no lugar geométrico, prove que o quadrilátero $OP_1P_2P_3$ é inscritível. Conclua que o tal lugar geométrico é formado pelos pontos de uma circunferência passando por O, retirando-se o ponto O.

Solução:

a)



Note que o ΔP_1OP_2 é semelhante ao ΔR_2OR_1, pois

$$\frac{|OP_2|}{|OP_1|} = \frac{|OR_1|}{|OR_2|}$$

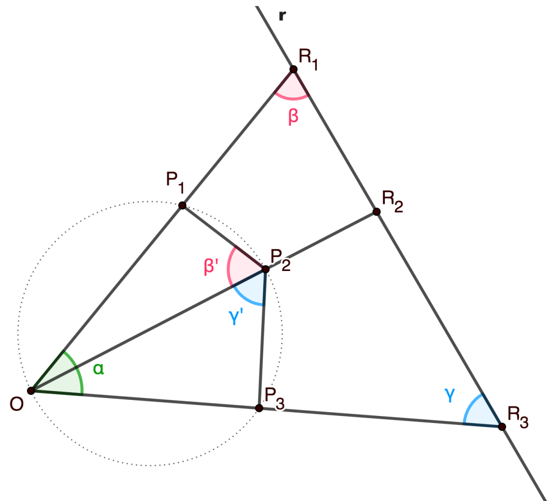
e $\widehat{P_2OP_1} = \widehat{R_1OR_2}$.

Assim $\widehat{OR_1R_2} = \widehat{OP_2P_1}$ ($=\beta$ na figura). Segue que a soma dos lados opostos do quadrilátero $R_1P_1P_2R_2$ é $180°$ e, portanto, o mesmo é inscritível.

Critérios:

- Verificou que ΔP_1OP_2 e ΔR_2OR_1 são semelhantes: **+6 pontos**
- Verificou que a soma dos lados opostos no quadrilátero é $180°$: **+2 pontos**
- Concluiu que o quadrilátero é inscritível: **+2 pontos**

b) Assuma, sem perda de generalidade, que estamos no caso da figura abaixo.



Sejam $\alpha = \widehat{R_1OR_3}$, $\beta = \widehat{OR_1R_3}$, $\gamma = \widehat{OR_3R_1}$ os ângulos internos do ΔOR_1R_3 como mostra a figura. Segue que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Considere também $\beta' = \widehat{P_1P_2O}$ e $\gamma' = \widehat{OP_2P_3}$. Pelo item (a) os quadriláteros $R_1P_1P_2R_2$ e $R_2P_2P_3R_3$ são inscritíveis. Portanto $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$. Sendo $\widehat{P_1P_2P_3} = \beta' + \gamma' = \beta + \gamma$, temos que a soma dos ângulos opostos em $OP_1P_2P_3$ é

$$\widehat{P_1OP_3} + \widehat{P_1P_2P_3} = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Assim concluímos que $OP_1P_2P_3$ é inscritível.

Finalmente, fixados dois pontos P_1 e P_2 no lugar geométrico, o resultado acima garante que qualquer outro ponto P_3 pertence a circunferência circunscrita em ΔOP_1P_2.

Critérios:

- Provou que $\widehat{P_1P_2P_3} = \beta + \gamma$: **+4 pontos**
- Concluiu que $OP_1P_2P_3$ é inscritível: **+3 pontos**
- Provou que os pontos do lugar geométrico estão numa circunferência: **+3 pontos**

6. Sejam a, b, c números reais positivos. Para cada inteiro positivo n considere a seguinte desigualdade
$$\frac{b+c}{a^n}+\frac{c+a}{b^n}+\frac{a+b}{c^n} \geq \frac{3^n}{(a+b+c)^{n-1}}+\frac{1}{a^{n-1}}+\frac{1}{b^{n-1}}+\frac{1}{c^{n-1}}.$$
Prove que

   a) Se existe $k \geq 0$ tal que $n = 2^k$ a desigualdade é válida para quaisquer $a, b, c > 0$.

   b) Se a, b, c formam os comprimentos dos lados de um triângulo, então a desigualdade é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

Solução:

Provemos a desigualdade no caso inicial em que $n = 1$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9.$$

Simplificando obtemos
$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6.$$

No caso geral, considere

$$f_n(a,b,c) = \frac{(a+b+c)^{n-1}}{3^n}\cdot\left(\frac{b+c-a}{a^n}+\frac{a+c-b}{b^n}+\frac{a+b-c}{c^n}\right).$$

A desigualdade fica equivalente a provar que $f_n(a,b,c) \geq 1$.

a) Note que $a+b+c = (b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)$. Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{b+c-a}{a^n}+\frac{a+c-b}{b^n}+\frac{a+b-c}{c^n}\right) \geq \left(\frac{b+c-a}{a^{n/2}}+\frac{a+c-b}{b^{n/2}}+\frac{a+b-c}{c^{n/2}}\right)^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_n(a,b,c) &\geq \frac{(a+b+c)^{n-2}}{3^n}\cdot\left(\frac{b+c-a}{a^{n/2}}+\frac{a+c-b}{b^{n/2}}+\frac{a+b-c}{c^{n/2}}\right)^2 \\ &\geq \frac{(a+b+c)^{n-2}}{3^n}\cdot\left(\frac{3^{n/2}f_{n/2}(a,b,c)}{(a+b+c)^{\frac{n}{2}-1}}\right)^2 \\ &\geq (f_{\frac{n}{2}}(a,b,c))^2. \end{aligned}$$

Para $n = 2^k$ temos

$$f_{2^k}(a,b,c) \geq (f_{2^{k-1}}(a,b,c))^2 \geq \cdots \geq (f_1(a,b,c))^{2^k} \geq 1$$

Critérios:

- Demonstrou o caso inicial $n = 1$: **+3 pontos**
- Demonstrou o segundo caso $n = 2$: **+3 pontos**
- Provou por indução o caso geral $n = 2^k$: **+4 pontos**

b) Note que

$$\sqrt[n]{f_n(a,b,c)} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{\lambda}{a^n} + \frac{\mu}{b^n} + \frac{\theta}{c^n}},$$

onde $\lambda = \frac{b+c-a}{a+b+c}$, $\mu = \frac{a+c-b}{a+b+c}$ e $\theta = \frac{a+b-c}{a+b+c}$.

Sendo a, b, c lados de um triângulo, temos que $\lambda, \mu, \theta \geq 0$. Como $\lambda + \mu + \theta = 1$ e a função $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é cônvava para $n > 1$, podemos usar a desigualdade de Jensen para concluir que

$$\sqrt[n]{f_n(a,b,c)} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{\lambda}{a^n} + \frac{\mu}{b^n} + \frac{\theta}{c^n}} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{\mu}{b} + \frac{\theta}{c}\right) = f_1(a,b,c) \geq 1.$$

Critérios:

- Notou que $\lambda + \mu + \theta = 1$: **+2 pontos**
- Observou que $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é côncava para $n \geq 1$: **+3 pontos**
- Verificou que Jensen implica o resultado: **+5 pontos**

BOA PROVA!