



OPRM 2018  
Nível 3 (ensino médio)  
Primeira Fase  
22/06/18 ou 23/06/18  
Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

Fiscal: \_\_\_\_\_

---

### INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 4 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Este caderno de questões pode ser usado como rascunho.
- As respostas finais devem ser indicadas na folha de resposta.
- Após o término, entregue ao **FISCAL** este caderno de questões e a folha de respostas toda preenchida.

**BOA PROVA!**

- Quantos divisores positivos 2019 tem?  
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32
- Qual é o raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado 1?  
(A) 1 (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (E)  $\sqrt{3}$
- O polinômio  $p(x) = 2x^2 - 1$  é tal que  $p(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$ , para todo ângulo  $\theta$ . Qual dos polinômios  $q(x)$  abaixo satisfaz  $q(\cos(\theta)) = \cos(3\theta)$ ?  
(A)  $3x^2 - 1$  (B)  $2x^3 - x$  (C)  $3x^3 - 2x$  (D)  $4x^3 - 3x$  (E)  $3x^4 - 4x$
- Uma das faces de um poliedro é um heptágono. Qual a quantidade mínima de faces que este poliedro pode ter?  
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
- A sequência de Fibonacci  $(F_n)$  é  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ , onde  $F_1 = F_2 = 1$  e os demais termos são a soma dos dois imediatamente anteriores. Qual é valor da soma

$$\sum_{n=1}^{2018} F_n?$$

- (A)  $F_{2018}^2 - 5$  (B)  $F_{2019} \cdot F_{1009}$  (C)  $F_{2020} - 1$  (D)  $F_{2021}^2 - 3$  (E)  $F_{2020} + 2$

- Considere uma função real  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Quanto vale  $f(2018)$ ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

- Se  $a, b, c$  são números reais tais que  $a + b + c = 0$ , qual das seguintes afirmações é verdadeira?  
(A)  $a + b \geq c$  (B)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$  (C)  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  (D)  $c^2 \geq a^2 + b^2$   
(E)  $ab + bc + ca = abc$
- Quantos pares de inteiros  $(a, b)$  satisfazem

$$a^2 + b^2 = 673?$$

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

- Qual é a área do triângulo cujas coordenadas dos vértices no plano cartesiano são  $(1, 2)$ ,  $(3, 7)$  e  $(5, 5)$ ?  
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

- No quadrilátero inscrito  $OPRM$  as semi-retas  $\overrightarrow{OM}$  e  $\overrightarrow{PR}$  se encontram no ponto  $X$ . Sabendo-se que os comprimentos  $|PR| = 5$ ,  $|XR| = 3$  e  $|XM| = 4$ , qual é o comprimento do lado  $OM$ ?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11. Considere a seguinte disposição dos números naturais. Nela vemos que o 1 está na primeira linha e o 10 está na quarta linha. Em qual linha está o 2018?

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 3 & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & & \\ 7 & 8 & 9 & 10 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \end{array}$$

- (A) 34 (B) 44 (C) 54 (D) 64 (E) 75
12. Quantas quadruplas  $(a, b, c, d)$  de inteiros  $a, b, c, d \geq 0$  satisfazem  $a + b + c + d = 2018$ ?
- (A)  $\binom{2021}{3}$  (B)  $\binom{2018}{4}$  (C)  $\binom{2021}{4} - 1$  (D)  $\binom{2018}{3} - 1$  (E)  $\binom{2018}{5}$
13. Um número inteiro positivo  $n$  pode ser escrito como soma de dois quadrados se existem inteiros  $a$  e  $b$  para os quais  $n = a^2 + b^2$ . Por exemplo 5 e 9 podem ser escritos como soma de quadrados, pois  $5 = 1^2 + 2^2$  e  $9 = 0^2 + 3^2$ . Qual dos seguintes números **não** pode ser escrito como soma de dois quadrados?
- (A) 104 (B) 119 (C) 157 (D) 229 (E) 269
14. Considere um triângulo isósceles  $ABC$  com  $|AB| = |AC| = 1$ . Sabendo que o ângulo no vértice  $A$  mede  $30^\circ$ , qual o comprimento do lado  $BC$ ?
- (A)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (B)  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$  (C)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$  (D)  $\sqrt{2}/2$  (E) Nenhuma das anteriores.
15. Quantas funções  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  são sobrejetivas?
- (A) 9 (B) 18 (C) 36 (D) 72 (E) 144
16. A notação  $\lfloor x \rfloor$  significa o menor inteiro que não supera  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$  e  $\lfloor 5 \rfloor = 5$ . Para quantos números inteiros positivos  $x$  vale
- $$\lfloor \sqrt{x} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{x} \rfloor = 12?$$
- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18
17. Qual é o maior inteiro positivo  $n$  tal que  $2018!$  é múltiplo de  $2^n$ ?
- (A) 2011 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2017 (E) 2018
18. Numa escola de ensino médio há 2018 alunos com idades entre 14 e 18 anos. Seja  $C$  o maior conjunto de alunos que nasceram no mesmo ano, no mesmo mês e no mesmo dia da semana. Qual é a quantidade mínima de alunos em  $C$ ?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
19. Quantos retângulos podem ser formados usando-se casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez  $8 \times 8$ ?
- (A)  $16^2$  (B)  $25^6$  (C)  $36^2$  (D)  $64^4$  (E)  $72^2$

20. Para quais valores de  $x$  real, existe  $y$  tal que

$$(x - y)^2 + \frac{y^2}{(x - y)^2} = 2y ?$$

- (A)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$     (B)  $x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  ou  $x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$     (C)  $\frac{\sqrt{3}-1}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{4}$   
(D)  $x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{4}$  ou  $x \geq \frac{\sqrt{3}+1}{4}$     (E)  $x \geq -1/4$