



OPRM 2018
Nível 3 (ensino médio)
Primeira Fase
22/06/18 ou 23/06/18
Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome: _____

Escola: _____

Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 4 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Este caderno de questões pode ser usado como rascunho.
- As respostas finais devem ser indicadas na folha de resposta.
- Após o término, entregue ao **FISCAL** este caderno de questões e a folha de respostas toda preenchida.

BOA PROVA!

1. Quantos divisores positivos 2019 tem?
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32
2. Qual é o raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado 1?
(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\sqrt{3}$
3. O polinômio $p(x) = 2x^2 - 1$ é tal que $p(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$, para todo ângulo θ . Qual dos polinômios $q(x)$ abaixo satisfaz $q(\cos(\theta)) = \cos(3\theta)$?
(A) $3x^2 - 1$ (B) $2x^3 - x$ (C) $3x^3 - 2x$ (D) $4x^3 - 3x$ (E) $3x^4 - 4x$
4. Uma das faces de um poliedro é um heptágono. Qual a quantidade mínima de faces que este poliedro pode ter?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
5. A sequência de Fibonacci (F_n) é $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$, onde $F_1 = F_2 = 1$ e os demais termos são a soma dos dois imediatamente anteriores. Qual é valor da soma

$$\sum_{n=1}^{2018} F_n?$$

- (A) $F_{2018}^2 - 5$ (B) $F_{2019} \cdot F_{1009}$ (C) $F_{2020} - 1$ (D) $F_{2021}^2 - 3$ (E) $F_{2020} + 2$

6. Considere uma função real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Quanto vale $f(2018)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

7. Se a, b, c são números reais tais que $a + b + c = 0$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(A) $a + b \geq c$ (B) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ (C) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (D) $c^2 \geq a^2 + b^2$
(E) $ab + bc + ca = abc$
8. Quantos pares de inteiros (a, b) satisfazem

$$a^2 + b^2 = 673?$$

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

9. Qual é a área do triângulo cujas coordenadas dos vértices no plano cartesiano são $(1, 2)$, $(3, 7)$ e $(5, 5)$?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

10. No quadrilátero inscrito $OPRM$ as semi-retas \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{PR} se encontram no ponto X . Sabendo-se que os comprimentos $|PR| = 5$, $|XR| = 3$ e $|XM| = 4$, qual é o comprimento do lado OM ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11. Considere a seguinte disposição dos números naturais. Nela vemos que o 1 está na primeira linha e o 10 está na quarta linha. Em qual linha está o 2018?

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 3 & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & & \\ 7 & 8 & 9 & 10 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \end{array}$$

- (A) 34 (B) 44 (C) 54 (D) 64 (E) 75
12. Quantas quadruplas (a, b, c, d) de inteiros $a, b, c, d \geq 0$ satisfazem $a + b + c + d = 2018$?
 (A) $\binom{2021}{3}$ (B) $\binom{2018}{4}$ (C) $\binom{2021}{4} - 1$ (D) $\binom{2018}{3} - 1$ (E) $\binom{2018}{5}$
13. Um número inteiro positivo n pode ser escrito como soma de dois quadrados se existem inteiros a e b para os quais $n = a^2 + b^2$. Por exemplo 5 e 9 podem ser escritos como soma de quadrados, pois $5 = 1^2 + 2^2$ e $9 = 0^2 + 3^2$. Qual dos seguintes números **não** pode ser escrito como soma de dois quadrados?
 (A) 104 (B) 119 (C) 157 (D) 229 (E) 269
14. Considere um triângulo isósceles ABC com $|AB| = |AC| = 1$. Sabendo que o ângulo no vértice A mede 30° , qual o comprimento do lado BC ?
 (A) $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ (B) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ (C) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$ (D) $\sqrt{2}/2$ (E) Nenhuma das anteriores.
15. Quantas funções $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ são sobrejetivas?
 (A) 9 (B) 18 (C) 36 (D) 72 (E) 144
16. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o menor inteiro que não supera x . Por exemplo, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Para quantos números inteiros positivos x vale

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{x} \rfloor = 12?$$

 (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18
17. Qual é o maior inteiro positivo n tal que $2018!$ é múltiplo de 2^n ?
 (A) 2011 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2017 (E) 2018
18. Numa escola de ensino médio há 2018 alunos com idades entre 14 e 18 anos. Seja C o maior conjunto de alunos que nasceram no mesmo ano, no mesmo mês e no mesmo dia da semana. Qual é a quantidade mínima de alunos em C ?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
19. Quantos retângulos podem ser formados usando-se casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez 8×8 ?
 (A) 16^2 (B) 25^6 (C) 36^2 (D) 64^4 (E) 72^2

20. Para quais valores de x real, existe y tal que

$$(x - y)^2 + \frac{y^2}{(x - y)^2} = 2y ?$$

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (B) $x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ou $x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{4}$
(D) $x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ou $x \geq \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (E) $x \geq -1/4$