OPRM 2018
2a Fase
Nível 3
01/09/18
Duração: 4 Horas

OPRM 2018 Olimpíada Paranaense de Matemática

---

1. Considere os números de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$, onde cada termo na sequência é a soma dos dois termos anteriores. O ano mais próximo de 2018 que é número de Fibonacci foi o ano de 1597. Qual é o próximo ano que é número de Fibonacci? Qual número de Fibonacci está mais próximo de 100000?

---

2. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas:

   a) A soma dos quadrados de dois inteiros consecutivos é um múltiplo de 4.

   b) A soma dos cubos de três inteiros consecutivos é um múltiplo de 9.

   c) A soma das quintas potências de cinco inteiros consecutivos é um múltiplo de 25.

---

3. O resultado do sorteio da Mega-Sena do dia 23 de junho de 2018 foi o primeiro dentre todos os 2052 concursos já realizados no qual todos os números sorteados começaram com o mesmo algarismo: $50 - 51 - 56 - 57 - 58 - 59$. Algumas pessoas alegaram que isso era uma prova que o sorteio havia sido manipulado e chegaram a classificar o sorteio como fraude, roubo e até viram o fato como sinal de corrupção.

   Por outro lado, muitos jogadores também evitam marcar números consecutivos, pensando que isso diminua a probabilidade de ganhar o prêmio, mas nesse concurso da Mega-Sena foram sorteados 4 números consecutivos.

   Suponha que os 6 números sorteados na Mega-Sena variam de 0 até 59.

   a) Qual a probabilidade que em 2052 sorteios nunca sejam sorteados 6 números começando com o mesmo algarismo? (Considere 0 como um possível valor para este algarismo, por exemplo, os números $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ têm todos primeiro algarismo 0).

   b) Qual a probabilidade que dentre os 6 números sorteados, a maior sequência de números consecutivos tenha comprimento 4?

---

4. Suponha que $P(x), Q(x), R(x)$ e $S(x)$ são polinômios tais que

$$P(x^5) + x\left[Q(x^5-1) - S(x)\right] + x^2\left[R(2019-x^5) - S(x)\right] - x^3S(x) = (1+x^4)S(x).$$

   a) Prove que existe um número complexo $z \neq 1$ tal que $z^5 = 1$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq n \leq 4$ tem-se

$$P(1) + z^nQ(0) + z^{2n}R(2018) = 0$$

   b) Prove que se $z \neq 1$ e $z^5 = 1$, então o determinante abaixo é diferente de zero.

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z^2 & z^3 \\ z^2 & z^4 & z^6 \end{pmatrix} = z^8 - 2z^7 + 2z^5 - z^4$$

c) Conclua que $1, 0$ e 2018 são raízes de $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente.

---

5. Seja O um ponto no plano e $\mathbf{r}$ uma reta que não contém O. Considere o lugar geométrico formado pelos pontos P para os quais $\overrightarrow{OP}$ intersecta $\mathbf{r}$ em R e $|OP| \cdot |OR| = 1$.

   a) Sejam P_1 e P_2 dois pontos no lugar geométrico tais que $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$ intersectam $\mathbf{r}$ em R_1 e R_2 respectivamente. Prove que o quadrilátero $R_1P_1P_2R_2$ é inscritível, ou seja, existe uma circunferência que passa por seus vértices.

   b) Se P_1, P_2, P_3 são pontos no lugar geométrico, prove que o quadrilátero $OP_1P_2P_3$ é inscritível. Conclua que o tal lugar geométrico é formado pelos pontos de uma circunferência passando por O, retirando-se o ponto O.

---

6. Sejam a, b, c números reais positivos. Para cada inteiro positivo n considere a seguinte desigualdade
$$\frac{b+c}{a^n} + \frac{c+a}{b^n} + \frac{a+b}{c^n} \geq \frac{3^n}{(a+b+c)^{n-1}} + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}} + \frac{1}{c^{n-1}}.$$
   Prove que

   a) Se existe $k \geq 0$ tal que $n = 2^k$ a desigualdade é válida para quaisquer $a, b, c > 0$.

   b) Se a, b, c formam os comprimentos dos lados de um triângulo, então a desigualdade é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

BOA PROVA!