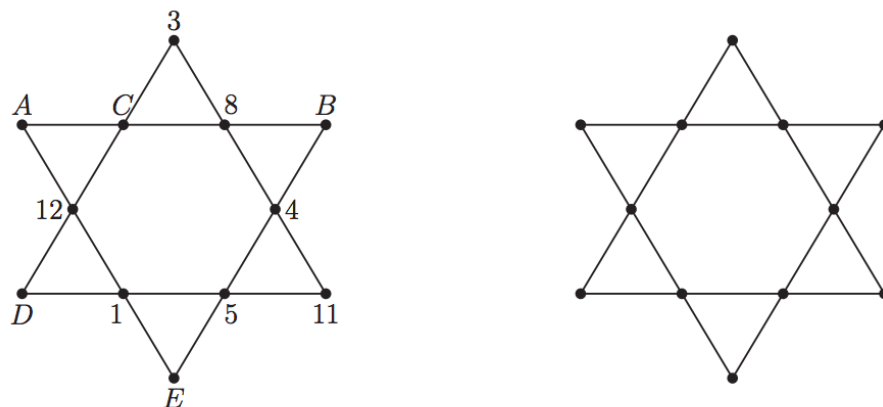
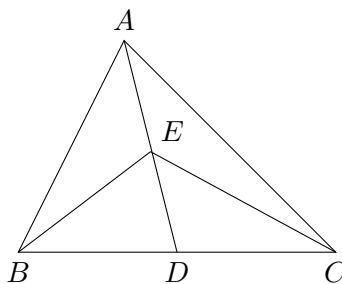


1. Augusto propõe ao seu amigo o seguinte desafio: na figura abaixo, os números naturais de 1 a 12 são escritos de forma que a soma de quatro números em uma linha reta é a mesma para todas as linhas. Alguns números foram substituídos pelas letras A , B , C , D e E .

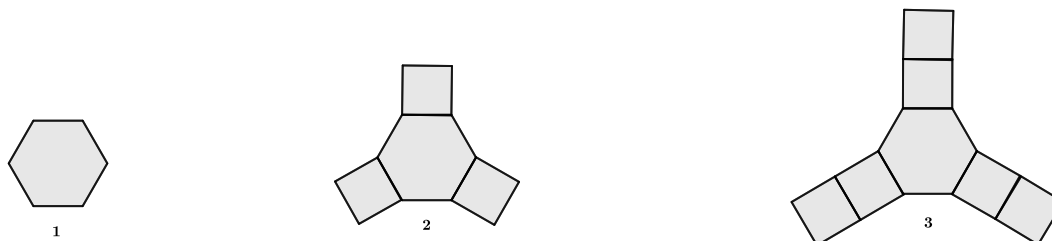


- a) Encontre os números correspondentes para as respectivas letras.
b) Em uma figura similar, disponha os números ímpares $1, 3, \dots, 23$ para que a soma dos quatro números seja igual novamente em cada uma das seis linhas retas.
-
2. João, Pedro e Gustavo são trigêmeos idênticos. Não é possível distingui-los somente pela aparência. João e Pedro sempre falam a verdade, mas Gustavo sempre mente – tudo o que ele fala é mentira. Sabemos que eles têm idade entre 20 e 30 anos, 20 e 30 inclusos. Certo dia, quando perguntados sobre suas idades, um deles diz: temos entre 20 e 29 anos, com 20 e 29 inclusos. Outro responde: temos entre 21 e 30 anos, com 21 e 30 inclusos, e um de nós dois está mentindo. Qual é a idade dos trigêmeos?
-
3. Em um triângulo ABC de área 1, considere D o ponto médio do segmento de reta BC e E o ponto médio de AD , como na figura abaixo.



- a) Determine as áreas dos triângulos BED e CED .
b) Nas condições acima, sejam ainda F o ponto médio de BE e G o ponto médio de CF . Calcule a área do triângulo EFG .

4. Usando apenas hexágonos e quadrados, Gabriel construiu as seguintes figuras:



Observe que para construir a figura de número **1** Gabriel usou somente um polígono, o hexágono. Já para a de número **2**, foram usados 4 polígonos – um hexágono e três quadrados –, e para a de número **3**, 7 polígonos – um hexágono e seis quadrados.

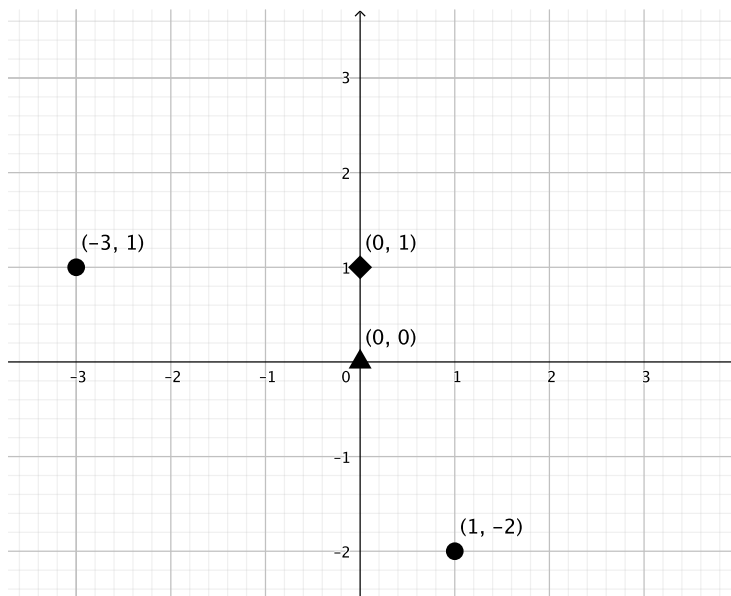
- Se seguirmos o padrão de construção estabelecido por Gabriel, quantos polígonos usaremos para construir a figura de número **10**?
- Dê uma fórmula que expresse quantos polígonos serão necessários para construir a figura de número **n**.

5. Cinco símbolos \bigcirc e quatro símbolos \star são dispostos no tabuleiro abaixo de forma que cada número é coberto ou por um \bigcirc ou por um \star .

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- De quantas maneiras diferentes os \bigcirc 's e os \star 's podem ser dispostos?
- Quantas entre estas maneiras contêm uma linha com três \star 's e nenhuma linha com três \bigcirc 's? *Esclarecimento: uma linha contendo três símbolos pode ser horizontal, vertical ou uma das diagonais 1 – 5 – 9 e 3 – 5 – 7.*

6. Aos pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano foram atribuídas figuras geométricas seguindo a regra: a dois pontos (x, y) e (z, w) são atribuídas a mesma figura geométrica se, e somente se, $x - z$ é múltiplo de 2 e $y - w$ é múltiplo de 3. Por exemplo, a mesma figura geométrica deve ser atribuída aos pontos $(-3, 1)$ e $(1, -2)$, já que $-3 - 1 = -4 = 2 \cdot (-2)$ e $1 - (-2) = 3 = 3 \cdot 1$. No entanto, figuras geométricas diferentes devem ser atribuídas aos pontos $(-3, 1)$ e $(0, 1)$, pois $-3 - 0 = -3$ não é múltiplo de 2.



- Na figura acima, atribuímos ao ponto $(0, 0)$ um triângulo. Determine os pontos aos quais também foram atribuídos um triângulo.
- Quantas figuras geométricas diferentes foram usadas para cobrir todos os pontos do plano?
- Para cada figura geométrica usada, considere todos os pontos aos quais ela foi atribuída e encontre dentre eles o que está mais próximo de $(0, 0)$.
- Para cada ponto (x, y) , vamos denotar por $\overline{(x, y)}$ o conjunto dos pontos aos quais foram atribuídas a mesma figura geométrica atribuída a (x, y) . Considere a seguinte multiplicação

$$\overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)} = \overline{(xz, yw)}.$$

Por exemplo, $\overline{(1, 2)} \cdot \overline{(2, 4)} = \overline{(2, 8)}$ e $\overline{(2, 8)} = \overline{(0, 2)}$, já que a $(2, 8)$ e $(0, 2)$ foram atribuídas a mesma figura geométrica.

Dê um exemplo de dois conjuntos $\overline{(x, y)}$ e $\overline{(z, w)}$ aos quais foram atribuídas figuras geométricas diferentes daquela atribuída aos pontos do conjunto $\overline{(0, 0)}$ tais que $\overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)} = \overline{(0, 0)}$.

BOA PROVA!