



OPRM 2019
Nível 2
Primeira Fase
14 ou 15 de Junho de 2019
Duração: 2 horas e 30 minutos

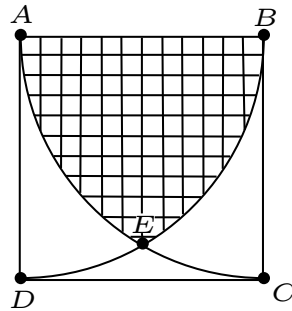
Nome: _____
Escola: _____
Fiscal: _____

INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **FISCAL** (pessoa que está aplicando a prova) nos campos acima.
- Esta prova contém 6 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo, peça ao **FISCAL** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Este caderno de questões pode ser usado como rascunho.
- As respostas finais devem ser indicadas na folha de resposta.
- Após o término, entregue ao **FISCAL** este caderno de questões e a folha de respostas toda preenchida.

BOA PROVA!

1. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 2, e \widehat{BD} e \widehat{AC} arcos de circunferência de raio AB . Sabendo que a área da figura formada pelos arcos \widehat{DE} , \widehat{EC} e pelo segmento CD é aproximadamente $1/2$, qual será a área, aproximadamente, da figura hachurada?

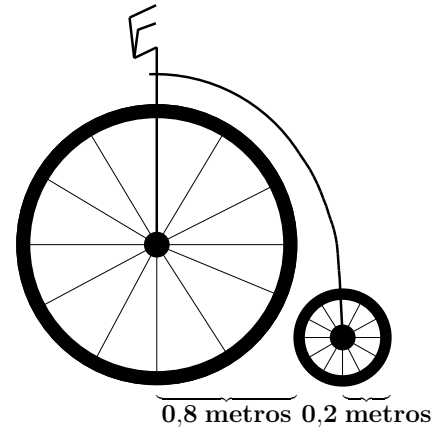


- (A) $2\pi - 3$ (B) $\frac{4\pi+9}{2}$ (C) $\frac{2\pi-3}{2}$ (D) 2π (E) $\frac{4\pi-7}{2}$

2. João é aficionado por bicicletas e decidiu construir uma no modelo antigo.

As bicicletas antigas tinham os pneus de tamanhos diferentes, logo João conseguiu um pneu de 0,8 metros de raio e outro com 0,2 metros de raio. Agora resta montar a bicicleta, porém em qual roda deve ficar o pedal? Por quê?

Lembre que João quer fazer o menor esforço possível ao usar sua bicicleta, ou seja, ele quer pedalar o menos possível ao percorrer determinada distância. Note também que se o pedal está em uma roda, uma volta pedalada por João no pedal gira a respectiva roda uma vez.



- (A) O pedal deve ser colocado na roda pequena, pois assim uma volta pedalada na roda pequena percorre a mesma distância que duas voltas pedaladas na roda grande.
- (B) O pedal deve ser colocado na roda pequena, pois assim uma volta pedalada na roda pequena percorre a mesma distância que quatro voltas pedaladas na roda grande.
- (C) O pedal deve ser colocado na roda grande, pois assim uma volta pedalada na roda grande percorre a mesma distância que duas voltas pedaladas na roda pequena.
- (D) O pedal deve ser colocado na roda grande, pois assim uma volta pedalada na roda grande percorre a mesma distância que quatro voltas pedaladas na roda pequena.
- (E) Tanto faz onde o pedal será colocado.

3. Quantos números de cinco dígitos distintos que alternam dígitos pares e ímpares existem? Por exemplo 12345 e 23456, não repetem o mesmo algarismo e seus algarismos são números pares e ímpares intercalados.

- (A) 6250 (B) 2160 (C) 2400 (D) 3125 (E) 1200

4. Índio Jones, o maior arqueólogo do mundo, fez uma escavação e descobriu a tumba de um faraó. Mas para destravar a porta da tumba, havia o seguinte problema a ser resolvido

$$\begin{cases} x = \text{Maior potência de 2 do número 5760, na decomposição em números primos} \\ y = \text{Soma dos algarismos de } mmc(x, 9) \\ z = mdc(mmc(x, 9), 27). \end{cases}$$

Jones faltou as aulas de matemática e não consegue descobrir o código. Qual seria a combinação (x, y, z) certa para Jones consiga entrar na tumba?

- (A) (2, 5, 9) (B) (7, 9, 9) (C) (7, 5, 9) (D) (7, 9, 8) (E) (2, 9, 9)

5. Considere a seguinte sequência:

	1	2	3	4	...
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Denotamos o número que corresponde à linha i e coluna j por $X_{i,j}$ e S_i a soma dos elementos da linha i . Então quanto vale a soma $S_{2019} - 2^{2020} \cdot X_{2019,2020}$.

- (A) -2^{2019} (B) 2^{2019} (C) 2^{2020} (D) -2^{2020} (E) 2^{2018}

6. Em uma sala de aula em dia de prova há alunos que estudaram e alunos que não estudaram. Dentre os alunos que estudaram 95% acertaram as questões, e dentre os alunos que não estudaram 90% erraram as questões. Sabendo que a sala tem 100 pessoas e 78 acertaram as questões, quantas pessoas da sala estudaram?

- (A) 80 (B) 95 (C) 75 (D) 50 (E) 85

7. Considere um grupo de 30 pessoas vivas que nasceram no Brasil. Assinale a única alternativa incorreta:

- (A) Pelo menos três pessoas fazem aniversário no mesmo mês.
 (B) Pelo menos duas pessoas têm o nome começando com a mesma letra do alfabeto.
 (C) Pelo menos quatro pessoas nasceram na mesma década.
 (D) Pelo menos duas pessoas nasceram no mesmo estado (lembre que o Brasil é composto de 26 estados mais o Distrito Federal).
 (E) Pelo menos cinco pessoas nasceram no mesmo dia da semana.

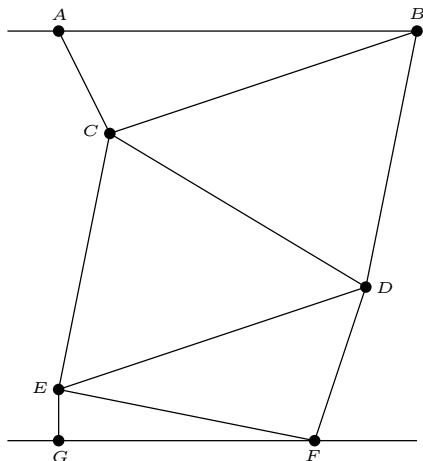
8. Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x^6 + 4y^8 + z^{19} = 145 \\ 5x^6 + 3y^8 + z^{19} = 1 \end{cases}$$

Sabendo que $y^4 + x^3 = 4$, calcule $\sqrt{y^4 - x^3}$.

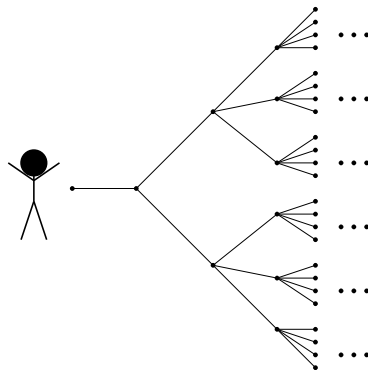
- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 9 (E) 5

9. Seja \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{GF} duas retas paralelas e considere os triângulo formados, como mostra a figura. Sabendo que $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle BCD = 40^\circ$ e $\angle EFG = 25^\circ$, qual o valor da diferença dos ângulos $\angle DEF - \angle CDE$?



- (A) 30° (B) 10° (C) 20° (D) 15° (E) 25°
10. O Sr. Boneco Palito está prestes a entrar em um caminho matemático. Nesse caminho, a cada trecho percorrido a estrada se abre em mais caminhos. Como na figura, ao percorrer o primeiro trecho, a estrada se abre em dois caminhos; agora o Sr. B.P. deve escolher um dos caminhos, e ao percorrer um segundo trecho da estrada ele se dividirá em três caminhos; e assim por diante. Note que ao final do quarto trecho a estrada já leva a 24 lugares diferentes, mas ela continua se dividindo dessa forma até o décimo trecho. O Sr. Boneco Palito quer chegar em um dos lugares no final da estrada, porém ele não lembra qual deles é. Sabendo que apenas um deles é correto, em quantos lugares errados o Sr. B.P. pode chegar? Observe que para determinar o número de lugares errados é preciso também determinar o total de lugares que a estrada leva. Lembre que, dado n um número natural qualquer, $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

- (A) $10!$
 (B) $10! - 1$
 (C) 1000000
 (D) $11!$
 (E) $11! - 1$



11. Dados a e b dois números inteiros quaisquer e considere a soma de seus quadrados

$$a^2 + b^2 = k.$$

Qual dos valores abaixo k não assume?

- (A) 1019 (B) 1009 (C) 1017 (D) 1000 (E) 1018

12. Dois números inteiros a e b são considerados congruentes módulo m se $m|(a - b)$, ou seja, a e b têm o mesmo resto na divisão por m . Denotamos essa relação por $a \equiv b \pmod{m}$. Sendo assim, assinale a única alternativa que contém um possível valor de x , sendo que x satisfaz as duas relações de congruência:

$$\begin{aligned}x &\equiv 35 \pmod{17} \\x &\equiv 20 \pmod{19}.\end{aligned}$$

- (A) 343 (B) 341 (C) 320 (D) 324 (E) 335

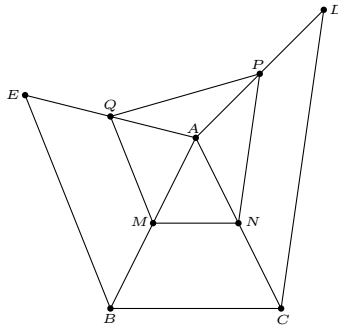
13. Determine o valor de x :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x$$

Note que o denominador da fração no lado esquerdo da igualdade repete o mesmo padrão infinitamente.

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

14. Considere $\triangle ABC$ um triângulo equilátero e M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, AC, AD e AE respectivamente. Sabendo que $AN = 2$ cm e $CD + ED + EB = 12$ cm, calcule o perímetro do quadrilátero $MNPQ$.



- (A) 9 cm (B) 8 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 12 cm

15. Qual os dois últimos algarismos do número $3^{2019} - 2 \cdot 3^{2018}$ na base 10?

- (A) 19 (B) 42 (C) 53 (D) 76 (E) 89

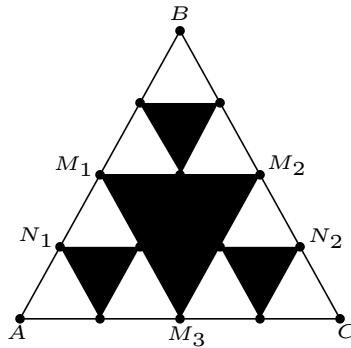
16. Em 2019 você participou de um sorteio e ganhou. Porém na hora de receber seu prêmio, descobriu que só receberia daqui à 16.384 dias. Sabendo que você recebeu essa notícia em uma segunda-feira do início de Janeiro, qual o dia da semana e o ano que você de fato receberá seu prêmio?

- (A) Segunda - 2063. (B) Terça - 2065. (C) Quinta - 2065. (D) Sexta - 2063. (E) Quarta - 2064.

17. Considere um quadrado de lado 1 e 10 pontos colocados no interior desse quadrado. Independentemente da escolha da disposição desses pontos, é sempre possível acharmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor ou igual a (assinale a opção com o menor valor possível tal que podemos garantir que a distância seja menor ou igual a esse número):

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

18. Dado um triângulo ΔABC equilátero podemos construir o *Triângulo de Sierpinski* da seguinte maneira: primeiro considere os pontos médios M_1, M_2 e M_3 dos lados AB, BC e AC respectivamente. Agora, retire o triângulo $\Delta M_1M_2M_3$ formado, o restante será o primeiro estágio do triângulo de Sierpinski. Proceda da mesma forma para construir o próximo estágio, como descreve a figura. Sabendo que o lado $AB = 8\text{ cm}$. Qual a área do triângulo ΔBN_1N_2 , retirando as partes hachuradas



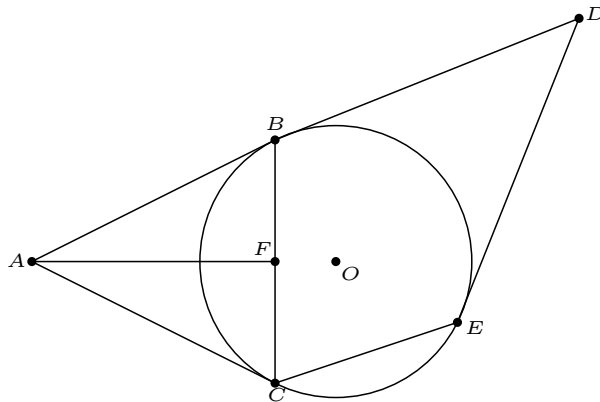
- (A) $5\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (B) $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (C) $5\sqrt{2}\text{ cm}^2$ (D) 8 cm^2 (E) $2\sqrt{5}\text{ cm}^2$

19. Assinale a alternativa com o valor correspondente a $x + y$, tal que

$$5^x - 11^y = 984.$$

- (A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 10

20. Considere AB e AC segmentos tangentes a circunferência de centro O , e $BCDE$ quadrilátero com os lados BD e DE tangentes a circunferência. Sabendo que $\angle ABF = 60^\circ$, AF é bissetriz e $AB = 2\text{ cm}$, $DE = 5\text{ cm}$. Qual o valor da soma $AC + BD + BF$.



- (A) 3 cm
(B) 16 cm
(C) 8 cm
(D) 9 cm
(E) 6 cm