OPRM 2019 - Resolução da 1ª fase

Nível 1

TOPMAT

Programa de Formação em
Matemática Olímpica

OPRM 2019
Olimpíada Paranaense
de Matemática

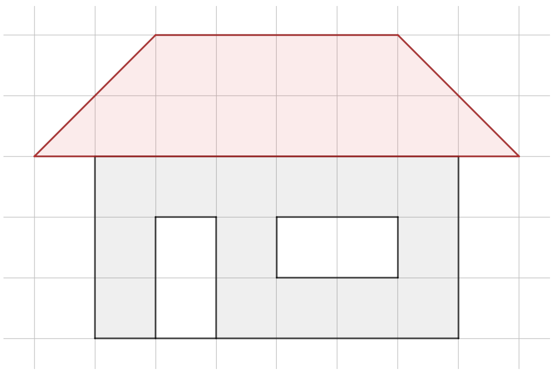
Sumário

Capítulo 1

OPRM 2019 – 1ª fase

1.1 Nível 1

1. Pedro desenha na folha quadriculada do seu caderno de matemática a figura a seguir. Se cada quadradinho possui 1 cm de lado, qual a área da porção pintada do desenho?



(A) 22 cm^2
(B) 24 cm^2
(C) 26 cm^2
(D) 28 cm^2
(E) 30 cm^2

Solução. Note que há 24 quadradinhos de lado 1 cm na região pintada e há 4 triângulos de base e altura de comprimento 1 cm. A área de cada quadradinho é 1 cm^2 e a área de cada triângulo é $\dfrac{1}{2}$ cm^2. Assim a área da porção pintada é:

$$24 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 24 + 2 = 26 \text{ cm}^2.$$

A resposta correta é a alternativa C. $\square$

2. Qual o valor da expressão a seguir, em sua forma irredutível?

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

(A) 1
(B) 1/2
(C) 3/5
(D) 5/3
(E) 2

Solução. Temos que

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Logo

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Assim a forma irredutível desta fração é:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

A resposta correta é a alternativa C. $\square$

3. Daniel possui 5 camisetas, 4 calças e 7 meias, todas de cores diferentes. Ele usa uma combinação de roupa a cada dia da semana. Por quantas semanas Daniel pode se vestir sem repetir uma combinação de roupa?

   (A) 15 semanas
   (B) 20 semanas
   (C) 24 semanas
   (D) 28 semanas
   (E) 35 semanas

   Solução. Como há 5 escolhas para camisetas, 4 para calças e 7 meias, há $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ combinações de roupa para cada dia da semana. Como uma semana tem 7 dias, então Daniel poderá se vestir sem repetir a combinação por

$$\frac{140}{7} = 20 \text{ semanas.}$$

   A resposta correta é a alternativa B. $\square$

4. Super dedicado ano passado na escola, João Maurício gastou completamente suas 3 canetas escrevendo 240 folhas nas suas aulas. Este ano, ele pretende manter a mesma dedicação e vai comprar materiais para isso. Sabendo que ano passado ele tinha 6 matérias de 4 horas e esse ano ele terá 7 matérias também de 4 horas, para ele manter o mesmo ritmo de estudo, deverá comprar:

   (A) 3 canetas e 240 folhas
   (B) 3 canetas e 260 folhas
   (C) 3 canetas e 280 folhas
   (D) 4 canetas e 260 folhas
   (E) 4 canetas e 280 folhas

   Solução. Como a nova matéria tem mesmo número de horas, então o número de folhas e canetas usadas será proporcional ao número de matérias. Suponha que a é o número de folhas do próximo ano, então

$$\frac{a}{7} = \frac{240}{6} = 40 \Rightarrow a = 7 \cdot 40 = 280 \text{ folhas.}$$

Do mesmo modo se b é o número de canetas usadas, então

$$\frac{b}{7} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{7}{2}.$$

Assim a quantidade utilizada de canetas, b, está entre 3 e 4, então ele deve comprar 4 canetas para que seja suficiente.

A resposta correta é a alternativa E. $\square$

5. Amanda, Beatriz e Cláudia são boas amigas e foram juntas a uma lanchonete. Ao terminarem de lanchar, Amanda pagou R$ 15,00, Beatriz R$ 7,00 e Cláudia R$ 5,00. Todas deviam pagar a mesma quantia; por isso, Beatriz ficou devendo à Amanda:

   (A) R$ 1,00
   (B) R$ 2,00
   (C) R$ 3,00
   (D) R$ 4,00
   (E) R$ 5,00

   Solução. As três juntas deviam $15 + 7 + 5 = 27$. Como cada uma devia a mesma quantia, então cada uma devia $27/3 = 9$ reais. Logo Beatriz devia para Amanda $9 - 7 = 2$ reais.

   A resposta correta é a alternativa B. $\square$

6. Qual o resto da divisão $2018^{2019} \div 2017$?

   (A) 2016
   (B) 693
   (C) 57
   (D) 1
   (E) 0

   Solução. Se a tem resto r na divisão por c, então para qualquer número $n \geq 1$, a^n tem resto r^n na divisão por c. Como 2018 tem resto 1 na divisão por 2017, segue que 2018^{2019} tem resto $1^{2019} = 1$ na divisão por 2017. Portanto o resto da divisão de 2018^{2019} por 2017 é 1.

   A resposta correta é a alternativa D. $\square$

7. João, Kauane, Larissa, Nathanael e Matilde foram almoçar juntos e aguardavam em fila para entrar no restaurante. Enquanto esperavam, começaram a seguinte discussão:
   João - sou mais alto que Kauane e mais baixo que Matilde.
   Kauane - sou mais alta que Matilde.
   Larissa - dentre as meninas (Kauane, Larissa e Matilde), sou a do meio.
   Nathanael - o mais alto de todos sou eu.
   Matilde - as meninas são mais baixas que os meninos (João e Nathanael).
   Sabendo que a fila é liderada pela pessoa mais baixa do grupo e que apenas uma está mentindo, é correto afirmar que o primeiro(a) da fila é:

   (A) João
   (B) Kauane
   (C) Larissa
   (D) Nathanael
   (E) Matilde

   Solução. Vamos encontrar quem está mentindo primeiro. Vemos que se João estiver falando a verdade a Kauane e a Matilde estarão mentindo, mas isso não pode acontecer pois só há uma pessoa mentindo. Então João deve estar mentindo e devemos desconsiderar seu comentário.

   Então a meninas são mais baixas que os meninos (comentário de Matilde), além disso Larissa é a do meio entre as meninas e Kauane é mais alta que Matilde, logo **Matilde é a mais baixa**.

   A resposta correta é a alternativa E. □

8. Aninha coleciona minerais. Ela tem 5 grafites, 7 quartzos, 10 micas e 4 ágatas que guarda numa estante com quatro prateleiras. Na prateleira de cima exibe os minerais do seu tipo preferido. O resto da sua coleção ocupa as outras prateleiras, com o mesmo número de minerais em cada uma das três prateleiras. Qual é o tipo de mineral preferido de Aninha?

(A) Grafite
(B) Quartzo
(C) Mica
(D) Ágata
(E) Não há dados suficientes

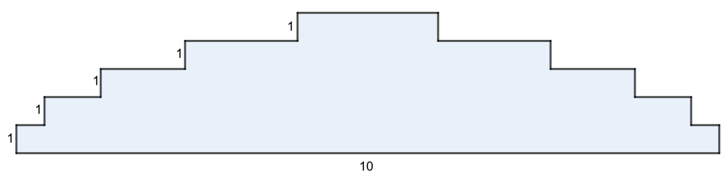
Solução. Um dos quatro tipos de minerais é o preferido e ficará na prateleira de cima. Então como há 3 prateleiras restantes e os minerais restantes estão distribuídos na mesma quantidade em cada uma destas 3 prateleiras, o número restante de minerais deverá ser múltiplo de 3.

Então supondo o grafite é o mineral preferido de Aninha, então a quantidade de minerais restantes será $7 + 10 + 4 = 21$ que é múltiplo de 3. O quartzo não pode ser, pois $5 + 10 + 4 = 19$ que não é múltiplo de 3. Do mesmo modo, $5 + 7 + 4 = 16$ logo a mica também não poderá ser. Por fim as ágatas também não são, pois $5 + 7 + 10 = 22$ que também não é múltiplo de 3.

Portanto a única possibilidade é que seja o grafite.

A resposta correta é a alternativa A. □

9. Qual o perímetro da figura abaixo? Cada degrau possui uma unidade de altura e a base possui 10 unidades, conforme indicado na figura.



(A) 30 unidades
(B) 35 unidades
(C) 40 unidades
(D) 45 unidades
(E) 50 unidades

Solução. Como a base mede 10 unidades, a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais na parte de cima é 10 unidades também. Há 10 segmentos verticais de 1 unidade, então contando a base, os segmentos horizontais da parte de cima e os segmentos verticais, o total será $10 + 10 + 10 = 30$ unidades.

A resposta correta é a alternativa A. $\square$

10. Na sala de aula do 6º ano há 40 estudantes, dos quais 24 são meninas e os demais são meninos. Em um dia de chuvas intensas faltaram 9 meninas e alguns meninos, porém as porcentagens de meninos e meninas na sala permaneceram as mesmas. Neste caso, quantos meninos faltaram naquele dia de chuvas?

    (A) 16
    (B) 14
    (C) 10
    (D) 9
    (E) 6

    Solução. Suponha que faltaram x meninos, então como a porcentagem de meninos e meninas permaneceu a mesma, então a proporção do número de meninas pelo total de estudantes será a mesma. Como faltaram 9 meninas e x meninos, segue que há $40 - (9 + x) = 40 - 9 - x = 31 - x$ estudantes e $24 - 9 = 15$ meninas. Fazendo a proporção do número de meninas teremos

$$\begin{aligned}\frac{15}{31-x} = \frac{24}{40} &\Rightarrow \frac{15}{31-x} = \frac{3}{5}\\ &\Rightarrow 15 \cdot 5 = 3 \cdot (31 - x)\\ &\Rightarrow 75 = 93 - 3x\\ &\Rightarrow 3x = 93 - 75 = 18\\ &\Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6.\end{aligned}$$

A resposta correta é a alternativa E. $\square$

11. Caroline tem uma cesta com 40 frutas, dentre elas maçãs, bananas e laranjas. O número de bananas é o dobro do número de maçãs. Ela deu todas as suas maçãs e metade de suas bananas para Roberta. Após isso, deu para Amanda todas as suas laranjas. Se sobraram 8 frutas na cesta, quantas laranjas existiam no início?

    (A) 10 laranjas
    (B) 12 laranjas
    (C) 14 laranjas
    (D) 16 laranjas
    (E) 18 laranjas

    Solução. Suponha que m seja o total de maçãs, b o total de bananas e l o total de laranjas. Sabemos que $m + b + l = 40$ e como o número de bananas é o dobro de número de maçãs, logo $b = 2m$. Além disso ela deu tudo, exceto metade do número de bananas que é 8. Ou seja, $b/2 = 8$, logo $b = 16$ bananas. Como $b = 2m$, temos que o número de maçãs é $m = 8$. Pondo estas informações na primeira equação temos $40 = m + b + l = 8 + 16 + l = 24 + l$, logo $l = 40 - 24 = 16$. Portanto eram 16 laranjas.

    A resposta correta é a alternativa D. □

12. Thais e Marco estão ajudando na construção de 10 casas, entregando os materiais necessários para o telhado. Cada casa é coberta com 10 telhas, e cada telha é fixada com 4 pregos. Ontem, Marco deixou em cada terreno as telhas. Thais deve levar os pregos necessários apenas para o que Marco já levou. Mas ela não sabe quantas telhas Marco deixou em cada casa; ela sabe apenas que ele distribuiu ao todo 70 telhas. Com essas informações, é INCORRETO afirmar que:

    (A) Thais deve levar 280 pregos.
    (B) Thais deve distribuir 28 pregos em cada casa.
    (C) É possível concluir o telhado de 7 casas, mas não é possível afirmar com certeza que as 70 telhas foram distribuídas em 7 grupos de 10.

(D) Marco deverá fazer outra viagem pois ainda não levou todas as telhas necessárias.
(E) É impossível dizer qual é a distribuição dos pregos entre as casas.

Solução. Como não há certeza de quantas telhas Marco levou em cada construção, não podemos afirmar a quantidade exata que Thais deve levar em cada construção. Além disso todas as alternativas, exceto a B, estão corretas, portanto B deve ser a incorreta. □

13. Luiz Artur encontrou o seguinte problema: nesta adição, cada letra representa um algarismo e letras diferentes representam algarismos diferentes. Que palavra representa o número 8195?

(A) BOLA
(B) NOLA
(C) LOBA
(D) LONA
(E) LANO

$$\begin{array}{r} \mathrm{B\,O\,A} \\ +\,\mathrm{O\,L\,A} \\ \hline \mathrm{O\,N\,O\,N} \end{array}$$

Solução. Temos que analisar cada alternativa ('?' representa um algarismo desconhecido):

(A) Suponha que BOLA representa o número 8195. Então:

$$\text{BOA} + \text{OLA} = 815 + 195 = 1010 = \text{ONON},$$

se considerarmos que N representa o número 0.

(B) Suponha que NOLA representa o número 8195. Então:

$$\text{BOA} + \text{OLA} = ?15 + 195 = 1818 = \text{ONON},$$

o que implica que $?15 = 1818 - 195 = 1623$, o que é contradição.

(C) Suponha que LOBA representa o número 8195. Então:

$$\text{BOA} + \text{OLA} = 915 + 185 = 1100 = \text{ONON},$$

o que é contradição.

(D) Suponha que LONA representa o número 8195. Então:

$$\text{BOA} + \text{OLA} = ?15 + 185 = 1919 = \text{ONON},$$

o que implica que $?15 = 1919 - 185 = 1734$, o que é contradição.

(E) Suponha que LANO representa o número 8195. Então:

$$\text{BOA} + \text{OLA} = ?51 + 581 = 5959 = \text{ONON},$$

o que implica que $?51 = 5959 - 581 = 5378$, o que é contradição.

Apenas a alternativa A satisfaz as condições do enunciado.

A resposta correta é a alternativa A. □

14. Daniel Contanúmero quer saber a quantidade de números inteiros de três algarismos compreendidos entre 500 e 999 cuja soma dos algarismos é 15. A resposta é:

(A) 35
(B) 40
(C) 41
(D) 43
(E) 45

Solução. Suponha que o primeiro, segundo e terceiro algarismos sejam a, b e c, respectivamente. Então temos $a+b+c = 15$, $5 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ e $0 \leq c \leq 9$. Utilizando a equação temos $c = 15 - a - b$, então uma vez escolhidos a e b só há uma possibilidade para c. Além disso para que $c \geq 0$, devemos ter $a + b \leq 15$, pois caso contrário teríamos $c < 0$. Do mesmo modo como $c \leq 9$, devemos ter também que $a + b \geq 6$. Vamos agora dividir em casos:

- Se $a = 5$ então como b é no máximo igual a 9, logo $a + b$ será no máximo 14 e no mínimo 5, mas como devemos ter $a + b \geq 6$, então $b \geq 1$ neste caso. Neste caso temos **9 possibilidades** para b.
- Se $a = 6$ então $a + b$ está entre 6 e 15, logo satisfaz a condição para $0 \leq b \leq 9$. Neste caso temos **10 possibilidades** para b.
- Se $a = 7$ então $a + b$ está entre 7 e 16, logo satisfaz a condição para $0 \leq b \leq 8$. Neste caso temos **9 possibilidades** para b.
- Se $a = 8$ então $a + b$ está entre 8 e 17, logo satisfaz a condição para $0 \leq b \leq 7$. Neste caso temos **8 possibilidades** para b.
- Se $a = 9$ então $a + b$ está entre 9 e 18, logo satisfaz a condição para $0 \leq b \leq 6$. Neste caso temos **7 possibilidades** para b.

Como a escolha de c é única para cada a e b escolhidos, basta somar o número de possibilidades para b de cada a escolhido, ou seja, a quantidade de números inteiros de três algarismos compreendidos entre 500 e 999 cujos algarismos somados temos 15 é $9 + 10 + 9 + 8 + 7 = 43$.

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

15. Em uma urna há vinte e cinco cartões enumerados de 1 até 25. Maria Clara escolheu, ao acaso, um dos cartões e deu as seguintes pistas:

    - O número do cartão que tenho em mãos é maior que 10;
    - Além disso, ele é um múltiplo de 3 que não é divisível por 7;
    - Por fim, ele não é sucessor de número primo.

    Diante disso, conclui-se que o número do cartão sorteado por Maria Clara é:

(A) 12
(B) 15
(C) 18
(D) 21
(E) 24

Solução. Sabemos que o número é maior que 10. Ele é um múltiplo de 3, mas não é múltiplo de 7, logo não pode ser 21, assim restando 12, 15, 18 e 24. Como este número não é sucessor de um primo, segue que não pode ser 12, 18 ou 24, pois 11, 17 e 23 são primos. Logo o número é 15.

A resposta correta é a alternativa B. □

16. Lorraine tem um recipiente cúbico com 10 cm de aresta que possui capacidade de 1 litro de água, ou seja, 1000 mililitros. Se temos 2 litros de água, quantos recipientes cúbicos com 5 cm de aresta podem ser preenchidos?

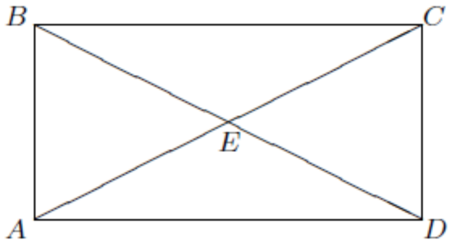
(A) 16
(B) 12
(C) 10
(D) 8
(E) 4

Solução. O volume de um cubo de aresta 10 cm é $10^3 = 1000$ cm^3 que equivale a 1 litro. Então se o cubo tem aresta 5 cm então o volume é $5^3 = 125$ cm^3. Como a divisão de 1000 por 125 é 8, segue que cada litro ocupa 8 recipientes de aresta 5 cm. Logo são necessários 16 recipientes de aresta 5 cm para conter 2 litros de água.

A resposta correta é a alternativa A. □

17. A casa da mãe de Natália localiza-se na esquina A da praça representada na figura. Os pontos A, B, C, D e E estão ligados por caminhos retos. De quantas maneiras diferentes Joana pode ir de A até D passando no máximo uma vez em cada caminho e no máximo uma vez em cada ponto?

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

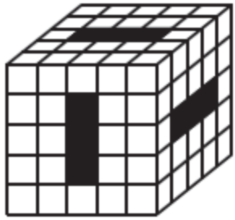


Solução. Se ela não passar em nenhum outro ponto, então há só uma possibilidade. Se ela passar por somente um ponto, então só pode passar por E. Se ela passar por dois pontos, então os caminhos possíveis são ABCD, ABED e AECD. Se ela passar por três pontos então os caminhos possíveis são ABCED, ABECD e AEBCD. Portanto há no total **8 possibilidades**.

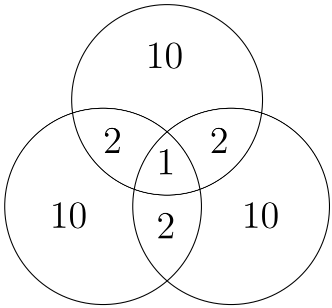
A resposta correta é a alternativa D. □

18. Um cubo mágico maior é formado pela colagem de vários cubinhos menores. Mateus atravessa este cubo maior com três espadas. Para isso, ele construiu um cubo mágico com três aberturas, que o atravessam de um lado ao outro, como representados na figura ao lado. Se cada face do cubo mágico é composta por 22 cubinhos, quantos cubinhos compõem o cubo mágico?

(A) 80
(B) 84
(C) 88
(D) 92
(E) 96



Solução. A aresta do cubo tem 5 cubinhos, então o cubo completo tem $5^3 = 125$ cubinhos. As três faixas tem 1 cubinho em comum, cada par de faixas retiradas tem 3 cubinhos em comum e cada faixa tem $5 \cdot 3 = 15$ cubinhos. Montando o diagrama teremos a seguinte configuração:



Então somando teremos 37 cubinhos retirados, ou seja, a quantidade de cubinhos que compõem o cubo mágico é $125 - 37 = 88$ cubinhos.

A resposta correta é a alternativa C. $\square$

19. Eric tem três dados com uma letra em cada uma das 6 faces, sendo as 18 letras todas diferentes. Eric lançou os três dados várias vezes e, em cada lançamento, formou as seguintes palavras com as letras que ficaram na face de cima: ERA, UMA, VEZ, QUE, LER, LEI, SUL, TER, GEL, SOL, FIM. Sabendo que a letra N está em algum dado, qual das seguintes letras está no mesmo dado que tem a letra N?

(A) I
(B) Q

(C) T
(D) M
(E) Z

Solução. Comparando a palavra ERA, LER e TER, concluímos que A-L-T estão no mesmo dado. Comparando LER com LEI e LER com GEL concluímos que R-I-G estão no mesmo dado. Novamente observando UMA e FIM, como I e A estão em dados diferentes, concluímos que os pares de letras I-U, A-F e E-M estão no mesmo dado.

Ou seja, já temos A-T-L-F em um dado R-I-G-U em outro e E-M no terceiro. Na palavra SUL teremos que E-M-S estão no mesmo dado, então olhando para a palavra SOL segue que R-I-G-U-O formam o mesmo dado. Além disso observando QUE teremos que A-T-L-F-Q formam o mesmo dado. Em VEZ sabemos que V e Z preenchem os A-T-L-F-Q e R-I-G-U-O de alguma maneira, assim o único dado que pode ter mais alguma letra não descoberta é o que contém as letras E-M-S. Portanto N deve estar no mesmo dado que contém a letra M, entre as alternativas.

A resposta correta é a alternativa D. □

20. Gabriel vai participar de um torneio de lançamentos composto por 10 voltas. Em cada volta, ele decide se quer lançar ou não. Se não lançar, ele mantém seus pontos. Se lançar e acertar no alvo, recebe 3 pontos; se lançar e falhar, perde 1 ponto. Cada jogador começa com 10 pontos. No fim do torneio, todos os participantes tiveram pontuações diferentes. Quantos jogado-

res, no máximo, podem ter participado no torneio?

(A) 37
(B) 38
(C) 39
(D) 40
(E) 41

Solução. Considere a os lançamentos certos e b os lançamentos errados. Como os competidores podem não lançar, temos que $a + b$ é no máximo 10 e a e b são no mínimo 0.

Então as pontuações são da forma $3a - b$.

- Se $a = 10$ então $b = 0$ logo a única pontuação possível para $a = 10$ é 30.
- Se $a = 9$ então $b = 0, 1$, logo as pontuações possíveis para $a = 9$ é 27 e 26.
- Para $0 \leq a \leq 8$ nós teremos $0 \leq b \leq 10 - a$ e a seguinte tabela

	Mínima pontuação	Máxima pontuação
$a = 8$	22	24
$a = 7$	18	21
$a = 6$	14	18
$a = 5$	10	15
$a = 4$	6	12
$a = 3$	2	9
$a = 2$	-2	6
$a = 1$	-6	3
$a = 0$	-10	0

  Portanto todas as pontuações possíveis entre -10 e 24 são possíveis.

Há 35 números entre -10 e 24, além de mais 3 para os casos em que $a = 9$ ou $a = 10$. Então as pontuações possíveis é 38, então pode haver no máximo 38 participantes na competição.

A resposta correta é a alternativa B. $\square$