OPRM 2019 - Resolução da 1ª fase

Nível 3

TOPMAT

Programa de Formação em
Matemática Olímpica

OPRM 2019
Olimpíada Paranaense
de Matemática

Sumário

Capítulo 1

OPRM 2019 – 1ª fase

1.1 Nível 3

1. Qual é a medida do lado de um triângulo equilátero de altura 2019?

   (A) 2019
   (B) 4038
   (C) $673\sqrt{3}$
   (D) $1346\sqrt{3}$
   (E) $2019\sqrt{3}$

   Solução. Um triângulo equilátero tem todos os ângulos internos iguais a 60^{o} e lados congruentes, logo se ℓ é a medida de um lado, então a altura h desse triângulo pode ser expressa da seguinte maneira

   $$h = \ell \cdot \operatorname{sen} 60^{\text{o}} = \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Logo

   $$\ell = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2019}{\sqrt{3}}.$$

   Como $2019 = 673 \cdot 3$, teremos que

   $$\ell = \frac{2 \cdot 673 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2 \cdot 673\sqrt{3} = 1346\sqrt{3}.$$

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

2. Sejam a e b raízes distintas da função real $f(x) = 2019x^2 + 2019x - 4038$. Qual é o valor de $(a+b)^{2019}$?

(A) -1
(B) 1
(C) 2^{2019}
(D) -2^{2019}
(E) -2019^{2019}

Solução. Para um polinômio da forma $p(x) = cx^2 + dx + e$ com $c \neq 0$, temos que a soma das suas raízes a e b será

$$a + b = -\frac{d}{c}.$$

Então pondo $c = 2019$, $d = 2019$ e $e = -4038$ teremos

$$a + b = -\frac{2019}{2019} = -1.$$

Portanto

$$(a+b)^{2019} = (-1)^{2019} = -1.$$

A resposta correta é a alternativa A. $\square$

3. Num quadrado mágico a soma dos valores nas linhas, colunas ou diagonais é sempre o mesmo. Qual é o valor de x no cubo mágico abaixo?

10	x	
	7	11
8		

(A) 2
(B) 6

(C) -3
(D) 5
(E) 8

Solução. Vamos nomear o quadrado superior direito como y:

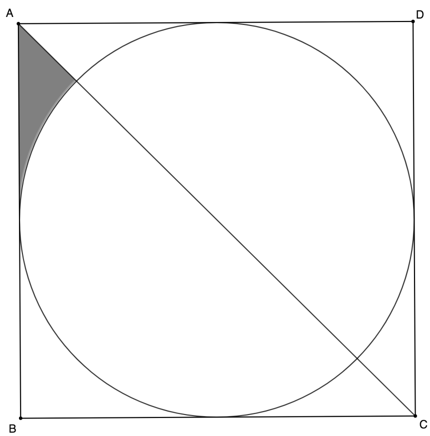
10	x	y
	7	11
8		

Olhando para linha superior temos que $10+x+y$ é o valor comum das diagonais, linhas e colunas. Olhando para a diagonal secundária teremos que $8+7+y$ é o valor comum. Logo

$$10+x+y=8+7+y \Rightarrow 10+x=15 \Rightarrow x=5.$$

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

4. Na figura abaixo temos um quadrado cuja diagonal vale 4 cm. O valor da área realçada em cm^2 é:



(A) $1-\dfrac{\pi}{64}$

(B) $1 - \dfrac{\pi}{32}$
(C) $1 - \dfrac{\pi}{16}$
(D) $1 - \dfrac{\pi}{8}$
(E) $1 - \dfrac{\pi}{4}$

Solução. Seja d a diagonal do quadrado $ABCD$. Sabemos que $d = 4$ cm. Então:

$$d = \ell\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Seja Γ a circunferência inscrita no quadrado $ABCD$. Perceba que o lado do quadrado $ABCD$ tem a mesma medida do diâmetro da circunferência Γ. Então o raio de Γ é $r = \dfrac{\ell}{2} = \sqrt{2}$.

Calculamos agora a área do quadrado $ABCD$ e da circunferência Γ:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \ell^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A}_{\Gamma} = \pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi \text{ cm}^2.$$

Perceba que a área realçada $\mathcal{A}$ equivale a $\frac{1}{8}$ da área de $ABCD$ que não está coberta pela área de Γ. Então:

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\Gamma}}{8} = \frac{8 - 2\pi}{8} = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2.$$

A resposta correta é a alternativa E. □

5. Considere a seguinte disposição de números. O número 9 está na segunda linha e na primeira coluna. O número 36 está na primeira linha e na quarta coluna. O número 2019 está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Qual é o valor de $i + j$?

3	16	19	36	43	64	75	$\cdots$
9	10	25	30	49	58	81	$\cdots$

(A) 42
(B) 43
(C) 44
(D) 45
(E) 46

Solução. Perceba que $(j+2)^2$ está presente na coluna j, para todo $j \geq 1$ inteiro. Se j for um número ímpar, então $(j+2)^2$ está na linha 2. Se j for um número par, então $(j+2)^2$ está na linha 1. Sempre o outro elemento da coluna j será $(j+2)^2 - 6$.

O número 2019 não é o quadrado de nenhum inteiro, mas $2019 + 6 = 2025 = 45^2$. Então 2019 está na coluna $j = 43$, pois $45^2 = (43+2)^2$, e na linha $i = 1$, pois 43 é ímpar. Logo,

$$i + j = 1 + 43 = 44.$$

A resposta correta é a alternativa C. $\square$

6. Uma urna contém 2020 bolinhas numeradas de 1 a 2020. Uma bolinha é sorteada. Qual é a probabilidade da bolinha sorteada ter um número com todos os seus algarismos ímpares?

(A) $\dfrac{14}{101}$
(B) $\dfrac{31}{101}$
(C) $\dfrac{37}{101}$
(D) $\dfrac{31}{404}$
(E) $\dfrac{37}{404}$

Solução. O espaço amostral Ω é dado pelo conjunto $\Omega = \{1, 2, \cdots, 2020\}$. O conjunto E é o evento que corresponde ao número sorteado conter apenas algarismos ímpares. Vamos separar o problema em casos:

Caso 1: o número sorteado possui apenas um algarismo. Nesse caso, o conjunto de números com apenas algarismos ímpares é $E_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Então $|E_1| = 5$.

Caso 2: o número sorteado possui apenas dois algarismos. Nesse caso, tome como E_2 o conjunto de números com apenas algarismos ímpares. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, como há apenas 5 algarismos ímpares, temos que $|E_2| = 5 \cdot 5 = 25$.

Caso 3: o número sorteado possui apenas três algarismos. Nesse caso, tome como E_3 o conjunto de números com apenas algarismos ímpares. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, como há apenas 5 algarismos ímpares, temos que $|E_3| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Caso 4: o número sorteado possui todos os quatro algarismos. Nesse caso, tome como E_4 o conjunto de números com apenas algarismos ímpares. Como a única possibilidade para o primeiro algarismo ser ímpar é o número 1, temos que $|E_4| = 125$, analogamente ao caso 3.

Então $|E| = |E_1|+|E_2|+|E_3|+|E_4| = 5+25+125+125 = 280$. Logo:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{280}{2020} = \frac{14}{101}.$$

A resposta correta é a alternativa A. □

7. Uma função real satisfaz

$$xf(10 - x) - f(x) = x^2 - 5.$$

Quanto vale $f(1)$?

(A) -9
(B) -2
(C) 0
(D) 2
(E) 9

Solução. Pondo $x = 1$ na expressão obtemos $f(9) - f(1) = -4$ e pondo $x = 9$ na expressão obtemos $9f(1) - f(9) = 76$. Somando as duas equações teremos:

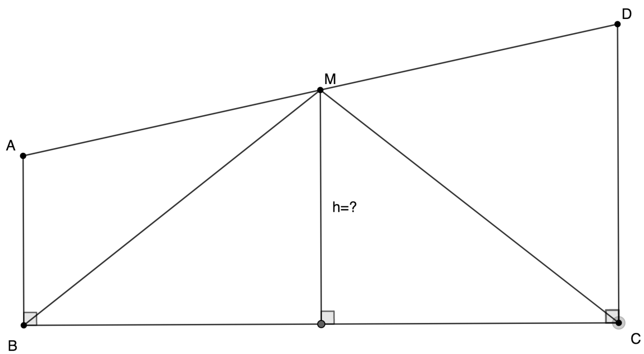
$$(f(9) - f(1)) + (9f(1) - f(9)) = -4 + 76$$

$$\Rightarrow 8f(1) = 72$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{72}{8} = 9.$$

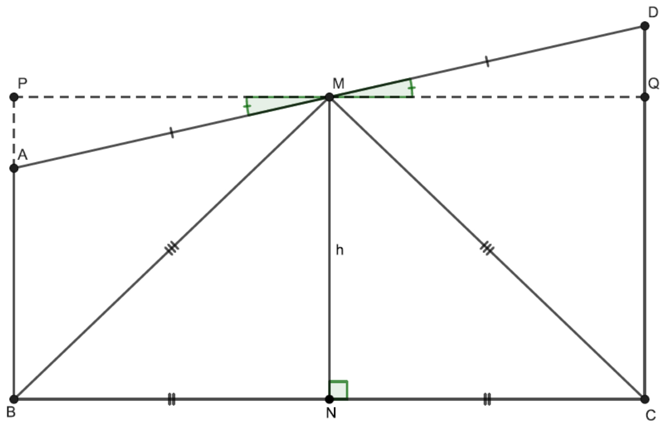
A resposta correta é a alternativa E. □

8. No trapézio retângulo $ABCD$ abaixo, escolhe-se M sobre AD de modo que o triângulo BMC seja isósceles com $BM = MC$. Sabendo que $AB = 3$ e $DC = 6$, qual o valor da altura do triângulo BMC com relação ao lado BC?



(A) 3
(B) $3,5$
(C) 4
(D) $4,5$
(E) 5

Solução. A figura a seguir ilustra o problema.



Como ΔMBC é isósceles, temos que $MB = MC$ e $BN = NC$. Disto segue que $AM = MD$ e $PM = MQ$. Temos também que $\angle PMA = \angle QMD$, pois são ângulos opostos ao mesmo vértice. Pelo critério de congruência LAL, temos que $\Delta PMA \equiv \Delta QMD$ e, portanto, $AP = QD$. Temos que $CD = BA + AP + QD = 6$. Como $BA = 3$, então $AP + QD = 3$. Mas vimos que $AP = QD$, o que implica que $2 \cdot AP = 3 \Rightarrow AP = 1,5$. Então:

$$h = BA + AP = 3 + 1,5 = 4,5.$$

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

9. Seja w uma raiz de $x^{2019} - 1 = 0$, tal que $w \neq 1$. O valor de $w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{2018} + w^{2019}$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2018
(D) 2019
(E) 2020

Solução. Temos que

$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1}),$$

então como $w^{2019} - 1 = (w-1)(1+w+w^2+w^3+\ldots+w^{2017}+w^{2018})$, segue que

$$(w-1)(1+w+w^2+w^3+\ldots+w^{2017}+w^{2018}) = 0.$$

Como $w \neq 1$, teremos que $1+w+w^2+w^3+\ldots+w^{2017}+w^{2018} = 0$, logo

$$\begin{aligned} w+w^2+\ldots+w^{2018}+w^{2019} &= w(1+w+\ldots+w^{2017}+w^{2018}) \\ &= w \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

A resposta correta é a alternativa A. $\square$

10. Zezinho possui uma coleção de tazos. Ele gosta de organizar os tazos em pilhas com a mesma quantidade de tazos. Ele percebeu que se formar pilhas com 4 tazos cada, sobram exatamente 3 tazos. Se ele formar pilhas com 5 tazos cada, sobram exatamente 4 tazos. E, finalmente, se ele formar pilhas com 11 tazos cada, sobram exatamente 5 tazos. Quantos tazos Zezinho possui, sabendo que Zezinho possui menos do que 200 tazos?

    (A) 119
    (B) 139
    (C) 159
    (D) 179
    (E) 199

Solução. Basta resolver o sistema: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$x = 4k+3 \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 4k \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow k \equiv 4 \pmod 5$$

$$\Rightarrow k = 4 + 5l.$$

Então:

$$x = 4k + 3 = 4(4 + 5l) + 3 = 16 + 20l + 3 = 20l + 19.$$

Substituindo o obtido na terceira equação, temos:

$$x = 20l + 19 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 20l \equiv -14 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 20l \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow l \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow l = 7 + 11m.$$

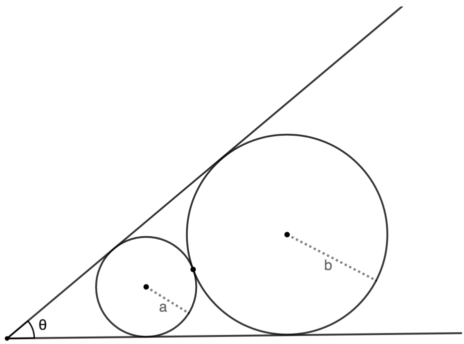
Então:

$$x = 20l+19 = 20(7+11m)+19 = 140+210m+19 = 210m+159.$$

Como Zezinho possui menos do que 200 tazos, então Zezinho possui $210 \cdot 0 + 159 = 159$ tazos.

A resposta correta é a alternativa C. □

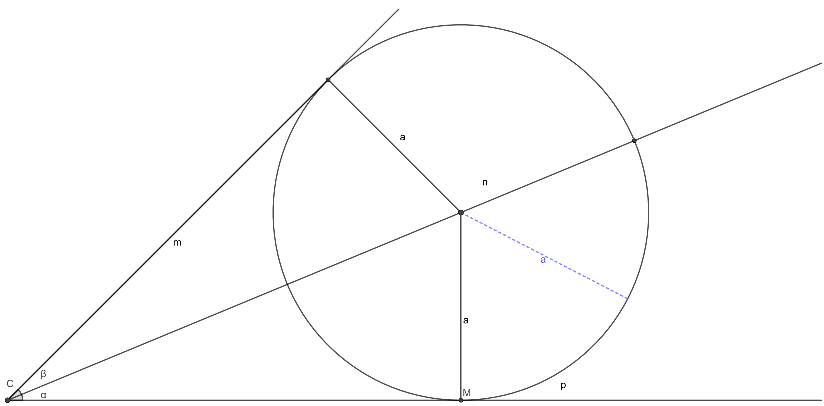
11. Na figura abaixo temos duas retas formando um ângulo θ e um círculo de raio a tangenciando as duas retas. Se $b > a$ é o raio do círculo que tangencia as duas retas e a circunferência de raio a, quanto vale o quociente b/a?



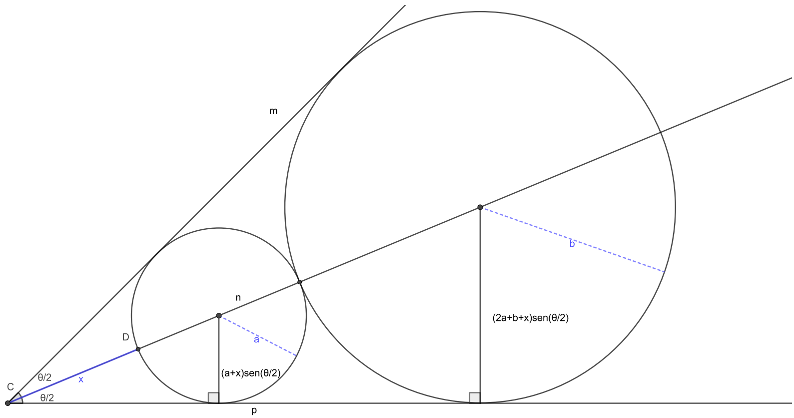
(A) $\text{sen}(\theta/2)$
(B) $\frac{1+\text{sen}(\theta/2)}{1-\text{sen}(\theta/2)}$

(C) $\text{tg}(\theta/2)$
(D) $1 + \frac{1}{\text{sen}(\theta/2)}$
(E) $1 + \cos(\theta)\text{sen}(\theta/2)$

Solução. Considere a semireta n que liga o ponto C, onde iniciam as semiretas tangentes, ao centro do círculo de raio a. Esta semireta será a bissetriz das semiretas p e m, tangentes aos círculos, pois considerando α o ângulo formado entre p e n e β o ângulo formado entre n e m, teremos que o centro, um ponto de tangência e o ponto C formarão um triângulo retângulo no ponto de tangência e os segmentos que ligam o centro aos pontos de tangência serão os catetos opostos aos ângulos α e β de mesmo comprimento e hipotenusa comum, logo $\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$ e portanto $\alpha = \beta$. Como $\alpha + \beta = \theta$, segue que $\alpha = \beta = \theta/2$.



Do mesmo modo podemos concluir que a semireta ℓ que liga o ponto C ao centro do círculo de raio b também é bissetriz de p e m, logo, pela unicidade da bissetriz, $\ell = n$. Portanto a bissetriz passa pelos centros dos dois círculos. Considerando D a intersecção do círculo de raio a com n e x o comprimento do segmento CD, observe a figura abaixo.



Note que $a = (a+x)\text{sen}(\theta/2)$ e $b = (2a+b+x)\text{sen}(\theta/2)$. Tomando a primeira equação e substituindo na segunda, teremos que

$$b = a + (a+b)\text{sen}(\theta/2) = a + a \cdot \text{sen}(\theta/2) + b \cdot \text{sen}(\theta/2)$$
$$\Rightarrow b - b \cdot \text{sen}(\theta/2) = a(1 + \text{sen}(\theta/2)).$$

Portanto

$$b(1 - \text{sen}(\theta/2)) = a(1 + \text{sen}(\theta/2)) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1 + \text{sen}(\theta/2)}{1 - \text{sen}(\theta/2)}.$$

A resposta correta é a alternativa B. $\square$

12. A maior potência de 2 que divide $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99 \cdot 100$ é:

(A) 2^{50}
(B) 2^{86}
(C) 2^{97}
(D) 2^{100}
(E) 2^{134}

Solução. Pelo Teorema de Legendre, temos:

$$E_2(100!) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^6} \right\rfloor =$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

Logo, a maior potência de 2 que divide 100! é 2^{97}.

A resposta correta é a alternativa C. $\square$

13. Um número de cinco algarismos é dito *zureta* se todos os seus algarismos forem primos e se o produto de seus algarismos for par. Quantos números *zuretas* existem?

(A) 121
(B) 243
(C) 256
(D) 781
(E) 943

Solução. Os algarismos primos são $2, 3, 5, 7$. Então, a quantidade de números de cinco algarismos com todos eles primos é 4^5, pelo Princípio Fundamental da Contagem. Destes números, a quantidade de números com o produto de seus algarismos ímpar é 3^5, pois a única maneira neste caso do produto ser ímpar é se todos os seus algarismos forem ímpares.

Logo, a quantidade de números zuretas é a diferença

$$4^5 - 3^5 = 1024 - 243 = 781,$$

visto que o produto dos algarismos de números zuretas deve ser par.

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

14. O número $\lfloor x \rfloor$ denota o menor inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3,4 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Para quantos inteiros positivos n,

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = 10 \ ?$$

(A) 7
(B) 8
(C) 9

(D) 10
(E) 11

Solução. Como $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ é o maior inteiro que não supera $\sqrt{n}$, segue que $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1$ é um inteiro maior que $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$, então deve exceder $\sqrt{n}$. Logo utilizando o mesmo argumento para $n+1$ teremos

$$\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \leq \sqrt{n} < \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1 \text{ e } \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor \leq \sqrt{n+1} < \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor + 1.$$

Somando as duas desigualdades obtemos:

$$\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor + 2$$

Se n satisfaz a condição $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor = 10$ então $10 \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 12$. Elevando os três termos da desigualdade ao quadrado e utilizando a fórmula do binômio quadrado no termo central teremos

$$100 \leq n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + (n+1) < 144$$

$$\Rightarrow 100 \leq 2n + 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 144.$$

Utilizando a desigualdade $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, teremos $\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)^2} = n+1$ e $n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n(n+1)}$. Então

$$100 \leq 2n + 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2n + 2(n+1) + 1 \Rightarrow 100 < 4n + 3.$$

Disso segue que $97 < 4n$ e então $\frac{97}{4} < n$. Como 25 é o menor inteiro que excede $\frac{97}{4}$ segue que $25 \leq n$.

Também teremos a desigualdade:

$$2n + 2n + 1 < 2n + 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 144 \Rightarrow 4n + 1 < 144$$

Logo $4n < 143 \Rightarrow n < \dfrac{143}{4}$. O maior inteiro menor que $\dfrac{143}{4}$ é 35, logo $n \leq 35$. Mas $\sqrt{35+1} = \sqrt{36} = 6$, logo $\left\lfloor \sqrt{36} \right\rfloor = 6$ e $5 \leq \sqrt{35} < 6$, logo $\left\lfloor \sqrt{35} \right\rfloor = 5$.

Então $n \neq 35$, logo $25 \leq n \leq 34$, assim $25 < n+1 < 36$.

A resposta correta é a alternativa D. $\square$

15. Seja f a função definida por $f(t) = t + a^t + b^t$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(1) = 6$ e $f(3) = 93$, quanto vale $f(2)$?

(A) $\dfrac{53}{3}$

(B) $\dfrac{67}{3}$

(C) $\dfrac{89}{3}$

(D) $\dfrac{95}{3}$

(E) $\dfrac{87}{2}$

Solução. Temos que:

$$f(1) = 1 + a + b = 6 \Rightarrow a + b = 5.$$

$$f(3) = 3 + a^3 + b^3 = 93 \Rightarrow a^3 + b^3 = 90.$$

Expandindo $(a+b)^3$, temos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow 5^3 = 90 + 3 \cdot ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 125 - 90 = 3 \cdot ab \cdot 5$$

$$\Rightarrow 35 = 15ab$$

$$\Rightarrow ab = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}.$$

Expandindo $(a+b)^2$, temos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = (a^2+b^2) + 2 \cdot \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 25 - \frac{14}{3} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{61}{3}.$$

Então, temos:

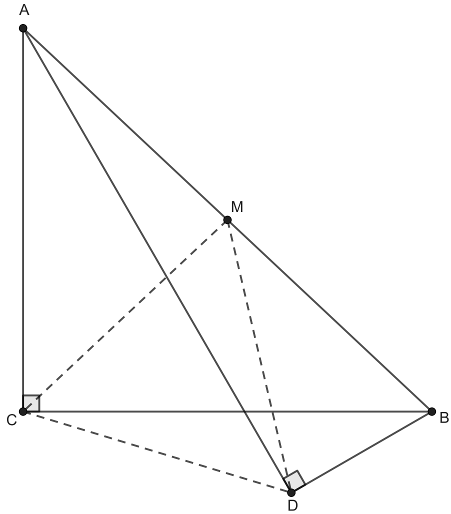
$$f(2) = 2 + a^2 + b^2 = 2 + \frac{61}{3} = \frac{67}{3}.$$

A resposta correta é a alternativa B. □

16. Dois triângulos retângulos ABC e ABD têm a mesma hipotenusa AB de comprimento ℓ. Sabendo que o ângulo $\widehat{CMD}$ é de 60º, onde M é o ponto médio da hipotenusa AB, podemos afirmar que o comprimento do segmento CD vale:

    (A) $\ell/3$
    (B) $\ell/2$
    (C) $\sqrt{3}\ell/2$
    (D) ℓ
    (E) $3\ell/2$

    Solução. A figura a seguir ilustra o problema.



Como M é o ponto médio da hipotenusa AB, temos que $AM = MB = \dfrac{\ell}{2}$, o que implica que $CM = \dfrac{\ell}{2}$ e $MD = \dfrac{\ell}{2}$. Então ΔCMD é isósceles. Como consequência, temos que $\angle MCD = \angle CDM = 60^{o}$, e portanto ΔCMD é equilátero. Logo, temos que $CD = \dfrac{\ell}{2}$.

A resposta correta é a alternativa B. $\square$

17. Quantos pares de inteiros positivos $a > b > 0$ satisfazem

$$a^2 - b^2 = 2019?$$

(A) 0
(B) 1
(C) 2

(D) 3
(E) 4

Solução. Temos que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 2019$. O número 2019 só pode ser decomposto em produto de inteiros positivos de duas maneiras. Cada maneira será abordado em um dos casos a seguir:

Caso 1: $2019 = 1 \cdot 2019$. Então $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 1 \cdot 2019$, o que implica que $a - b = 1$ e $a + b = 2019$. Resolvendo o sistema, obtemos que $a = 1010$ e $b = 1009$.

Caso 2: $2019 = 3 \cdot 673$. Então $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 3 \cdot 673$, o que implica que $a - b = 3$ e $a + b = 673$. Resolvendo o sistema, obtemos que $a = 338$ e $b = 335$.

Logo, há apenas 2 pares de inteiros positivos $a > b > 0$ que satisfazem $a^2 - b^2 = 2019$.

A resposta correta é a alternativa C. □

18. De quantas maneiras é possível distribuir 50 bombons iguais entre 5 pessoas, de modo que cada pessoa receba necessariamente pelo menos 7 bombons?

(A) 1365
(B) 3876
(C) 23256
(D) 82251
(E) 316251

Solução. Distribua 7 bombons para cada uma das 5 pessoas. Agora temos apenas 15 bombons para distribuir. Calcular a quantidade de maneiras possíveis de distribuí-los é equivalente à calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação: $a+b+c+d+e = 15$. Basta calcular as permutações entre os 4 sinais de + e os 15 bombons. Temos:

$$P_{15,4} = \frac{19!}{15! \cdot 4!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 19 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 3 = 3876.$$

A resposta correta é a alternativa B. □

19. Qual o valor da soma: $\dfrac{2}{2^2-1}+\dfrac{2}{3^2-1}+\dfrac{2}{4^2-1}+\cdots+\dfrac{2}{18^2-1}+\dfrac{2}{19^2-1}$?

(A) $\dfrac{531}{380}$

(B) $\dfrac{423}{380}$

(C) $\dfrac{187}{19}$

(D) $\dfrac{54}{19}$

(E) $\dfrac{27}{19}$

Solução. Queremos calcular o valor de $\displaystyle\sum_{k=2}^{19}\frac{2}{k^2-1}$. Note que podemos decompor o termo geral dessa soma em frações parciais:

$$\frac{2}{k^2-1}=\frac{2}{(k-1)(k+1)}=\frac{A}{k-1}+\frac{B}{k+1}=$$

$$=\frac{A(k+1)+B(k-1)}{(k-1)(k+1)}=\frac{Ak+A+Bk-B}{(k-1)(k+1)}=$$

$$=\frac{k(A+B)+(A-B)}{k^2-1}.$$

Disto segue que $A+B=0$ e $A-B=2$ e portanto, $A=1$ e $B=-1$.

Então, temos:

$\sum_{k=2}^{19}\frac{2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{19}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{18-1}-\frac{1}{18+1}\right)+\left(\frac{1}{19-1}-\frac{1}{19+1}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}=\frac{531}{380}.$

A resposta correta é a alternativa A. □

20. O número 6^{2019} está escrito em um quadro negro. Calculamos a soma de seus algarismos, depois a soma dos algarismos do resultado e assim por diante, até obtermos um único algarismo. Qual é esse algarismo?

(A) 0
(B) 3
(C) 6
(D) 7
(E) 9

Solução. Como os restos da divisão por 9 de um número natural e da soma de seus algarismos são iguais, o resto de 6^{2019} tem que ser igual ao resto do resultado final x. Temos:

$$6^{2019} \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2019} \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2017} \cdot 3^2 \equiv 2^{2019} \cdot 3^{2017} \cdot 9 \equiv 0 \pmod 9.$$

Como $x \equiv 0 \pmod 9$ e x é um algarismo, então $x = 0$ ou $x = 9$. Como estamos sempre somando algarismos positivos, a soma nunca será nula e, por isso, $x = 9$.

A resposta correta é a alternativa E. $\square$