

1. Bernardo tem um jogo de celular que consiste em capturar *esferas mágicas* identificadas com os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Cada vez que uma esfera mágica é capturada ela é colocada em um compartimento identificado no seu celular que marca a ordem que ele capturou.

No primeiro dia que ele baixou o jogo ele capturou as esferas mágicas de números 1, 4 e 3, nesta ordem. E elas foram colocadas no compartimento **A**. No segundo dia ele capturou as esferas mágicas de números 5, 7, 6 e 2, nesta ordem. Essas foram colocadas no compartimento **B**. A situação é mostrada na Figura 1 abaixo:

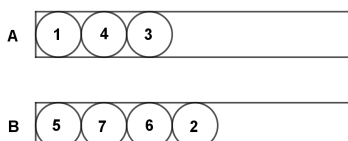


Figura 1: Compartimentos de Bernardo

Depois de capturadas todas as 7 esferas, para ganhar o jogo, Bernardo deve colocá-las em **ordem crescente, da esquerda para a direita** no compartimento **A**.

O jogo deixa movimentar quantas esferas Bernardo quiser de um compartimento para o outro, tirando as esferas do lado direito de cada compartimento. Porém a ordem das esferas que ele tira de um compartimento para colocar em outro **sempre vai ficar igual**.

Por exemplo, se ele quiser tirar as esferas 6 e 2 do compartimento **B** e colocá-las no compartimento **A**, a ordem, da esquerda para a direita no compartimento **A** irá ficar 1, 4, 3, 6 e 2, e no compartimento **B** irá ficar 5 e 7, conforme mostra a Figura 2 abaixo.

Outro exemplo, depois que Bernardo fez a movimentação acima, ele pode movimentar as esferas 4, 3, 6 e 2 do compartimento **A** para o compartimento **B**. Depois dessa movimentação as esferas no compartimento **B** terão a seguinte ordem, da esquerda para a direita, 5, 7, 4, 3, 6 e 2. Já o compartimento **A** terá apenas a esfera de número 1. Veja a Figura 2 abaixo:

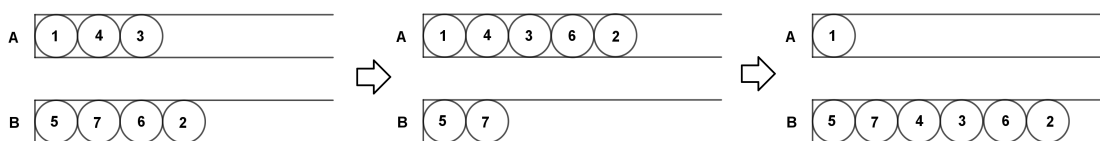


Figura 2: Exemplo de movimentações

- Partindo da **Figura 1**, indique uma sequência de movimentações que Bernardo precisa fazer, entre os seus compartimentos **A** e **B**, para deixar no compartimento **A** apenas as esferas 1, 2, 3 e 4, nesta ordem da esquerda para a direita.
- Indique uma sequência de movimentações que Bernardo precisa fazer, entre os seus compartimentos **A** e **B**, para ganhar o jogo.
- Bruna, a amiga de Bernardo, também baixou o jogo no **mesmo dia que ele**. No primeiro dia ela capturou as esferas 2, 3 e 5 e colocou no seu compartimento **C**, nessa ordem. No segundo dia ela capturou as esferas 1, 4, 7 e 6 e colocou no seu compartimento **D**, nessa ordem. Veja a Figura 3 abaixo:

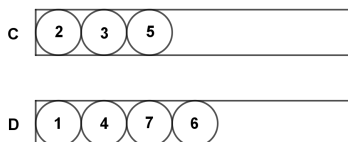
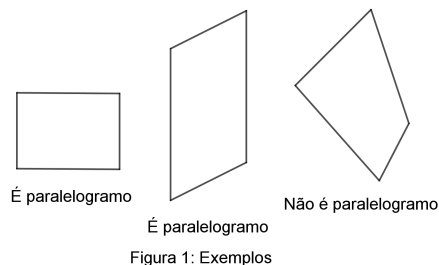


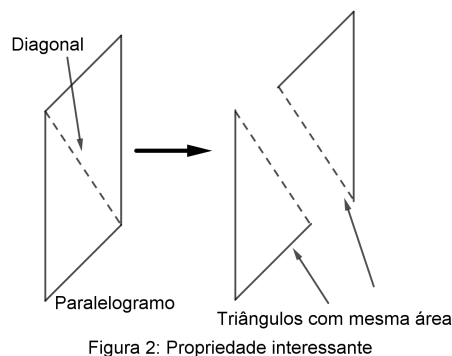
Figura 3: Compartimentos de Bruna

Para Bruna ganhar o jogo ela precisa **colocar todas as sete esferas em ordem crescente, da esquerda para direita** no compartimento C. Supondo que Bernardo e Bruna começam a fazer as movimentações **a partir do terceiro dia** e que o jogo deixa fazer **apenas uma movimentação por dia para cada pessoa**, e supondo que Bernardo e Bruna façam o **menor número** de movimentações para ganhar o jogo, quantos dias se passam (desde o primeiro dia) até que alguém ganhe? Quem ganha primeiro?

2. Na última aula do *POTI*, Pedro aprendeu que **paralelogramos** são **quadriláteros que têm lados opostos de mesmo comprimento** (veja a figura 1 abaixo com alguns exemplos).



O professor de Pedro mostrou uma propriedade interessante: ao cortar um paralelogramo pela sua **diagonal** se obtém **triângulos de mesma área** (veja Figura 2 abaixo).



A seguir o professor de Pedro deu uma folha **triangulada** para ele, dividida em vários triângulos **iguais e equiláteros**, isto é, com **todos os lados de mesmo comprimento** (veja a Figura 3 abaixo). O professor ainda disse que todos os triângulos tinham **área igual a 1**.

A tarefa de Pedro foi calcular as áreas das figuras pintadas. Uma dica que o professor deu foi **usar a propriedade** que ele mostrou **das diagonais**.

Sabendo que Pedro acertou todos os valores das áreas das figuras, escreva as respostas que Pedro deu ao seu professor, utilizando a dica dada pelo professor para justificá-las.

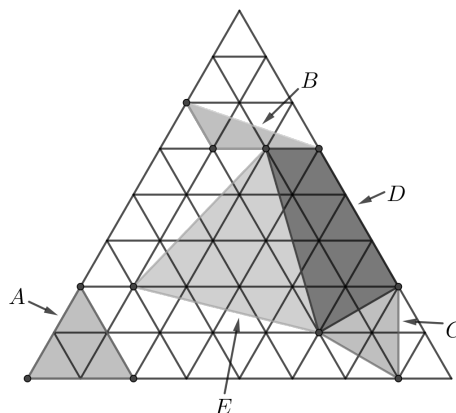


Figura 3: Tarefa de Pedro

- a) área da figura *A*.
- b) área da figura *B*.
- c) área da figura *C*.
- d) área da figura *D*.
- e) área da figura *E*.

3. Conheça a pulga Perninha:



Perninha foi colocada no *Pulatório*, um caminho infinito feito de tapetinhos numerados a partir do 0:



Aqui ela só consegue pular para a direita ou para a esquerda (do ponto de vista de quem está olhando de fora) e do seguinte modo: quando pula **para a direita** se desloca exatamente **5** tapetinhos; quando pula **para a esquerda** se desloca exatamente **3** tapetinhos. Ou, dito de outro modo, caso se desloque para a direita, a diferença entre o número do tapetinho de chegada e o de saída é 5; caso se desloque para a esquerda, a diferença entre o número do tapetinho de saída e o de chegada é 3. Por exemplo, se ela estiver no tapetinho “26” ela pode saltar à direita e chegar no tapetinho “31” (pois $31 - 26 = 5$) ou à esquerda e chegar no tapetinho “23” (pois $26 - 23 = 3$).

a) Perninha foi colocada no tapetinho “0”. Exiba uma possível sequência de saltos que ela pode realizar para chegar no tapetinho “11”.

Depois, **partindo do tapetinho “11”**, exiba uma possível sequência de saltos que ela pode realizar para chegar no tapetinho “2019”.

b) Uma outra pulga, a Anteninha, também está presa no Pulatório, mas ela se move de outro modo: quando pula para a direita se desloca exatamente 2 tapetinhos; quando pula para a esquerda se desloca exatamente 3 tapetinhos. Perninha foi deixada no tapetinho “0” e Anteninha no tapetinho “500”.

O que elas podem fazer para chegar no tapetinho “250” **com a mesma quantidade de pulos**? Qual é a **menor** quantidade de pulos para a qual isso ocorre?

c) Chegou o tão aguardado feriado do Dia Mundial do Número Primo e Perninha resolveu celebrá-lo do seguinte modo: a cada vez que está num tapetinho de número **primo**, dá um pulo **para a direita**, e a cada vez que está num tapetinho de número **não primo**, dá um pulo **para a esquerda**. Mas, lembre-se de como Perninha pula: quando pula para a direita se desloca cinco tapetinhos, quando pula para a esquerda se desloca três tapetinhos. Assim, por exemplo, se neste dia especial ela estiver no tapetinho “17” ela saltará no “22” (pois 17 é primo); se estiver no tapetinho “30” saltará no “27” (pois 30 não é primo).

Se no Dia Mundial do Número Primo Perninha for jogada no tapetinho “13” onde ela estará quando completar o 997° salto?

4. Leia o diálogo entre os números 13 e 16:



Os números 16 e 13 são **amigos quadráticos**, pois, por um lado, $16^2 = 256$ e $2 + 5 + 6 = 13$ e, por outro lado, $13^2 = 169$ e $1 + 6 + 9 = 16$. Responda o que se pede justificando as respostas:

- Os números 17 e 19 são amigos quadráticos?
- Caso um número seja amigo quadrático de si mesmo, ele é dito **egoísta quadrático**. Por que os números 0 e 1 são egoístas quadráticos? Encontre um outro número (além do 0 e do 1) que seja egoísta quadrático.
- Caso um número não possua nenhum amigo quadrático e também não seja um egoísta quadrático, ele é dito **solitário quadrático**. Dentre os números naturais, quantos solitários quadráticos existem entre 100 e 999 (incluindo 100 e 999)?
- Existem também os **colegas quadráticos**. Dois números são colegas quadráticos se a soma dos algarismos do quadrado de um número é igual à soma dos algarismos do quadrado do outro. Por exemplo, os números 4 e 5 são colegas quadráticos porque a soma dos algarismos de $4^2 (= 16)$ é 7 e a soma dos algarismos de $5^2 (= 25)$ também é 7. Os números 13 e 17 são colegas quadráticos?
E os números 508 e $\sqrt{1 + 6060060006 \times 3030030004 - 2020020002 \times 9090090009}$?
- Beremiz, excepcional matemático que nunca errava as contas, deparou-se com o seguinte número escrito numa parede:

811X7013Y321512412Z

Os algarismos marcados com **X**, **Y** e **Z** estavam apagados. Para decifrá-los, Beremiz dispunha apenas das seguintes informações:

- Os números **YZX** e **ZYX** não são solitários quadráticos;

- O número XYZ é colega quadrático do 12.

Depois de pensar um pouco, Beremiz afirmou: “**Este número na parede é certamente um múltiplo de 30!**” Como é que Beremiz descobriu isso?

BOA PROVA!