

1. Sejam a e b números reais quaisquer. Faça o que se pede em cada item:

- Mostre que $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
- Prove que a e b são as raízes da equação: $x^2 - (a + b)x + ab = 0$.
- Encontre as soluções reais da equação: $\sqrt[3]{2019 - x} + \sqrt[3]{x - 1263} = 12$.

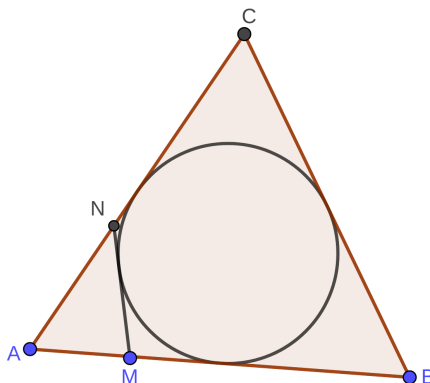
2. Um número é dito *samurai* se puder ser escrito na forma

$$2 \underbrace{00 \dots 00}_{n\text{-zeros}} 19$$

onde n é um inteiro e $n \geq 2$. Por exemplo, 20019 e 2000019 são números samurais, mas 2019 não é.

- Mostre que existem dois números samurais cuja diferença entre eles é múltiplo de 2019.
- Mostre que existem infinitos números samurais que são múltiplos de 2019.

3. Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero e sejam M e N pontos de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, tais que o segmento \overline{MN} é tangente à circunferência inscrita de $\triangle ABC$.



- Mostre que o perímetro do triângulo $\triangle AMN$ é igual ao lado do triângulo $\triangle ABC$.
- Prove que $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$.

4. Num planeta distante habitam seres peculiares. Eles se diferenciam somente pela cor de seus corpos que pode ser: Amarela, Verde ou Roxa. Alguns fatos genéticos interessantes desses seres são os seguintes:

- só nascerá um novo ser do encontro de dois seres de cores diferentes;
- nesses encontros os seres se fundem para formar um novo ser;



- o novo ser nunca terá a mesma cor que os pais. Assim temos as seguintes possibilidades:
 - um ser Amarelo e um ser Verde se fundem para formar um novo ser Roxo;
 - um ser Verde e um ser Roxo se fundem para formar um novo ser Amarelo;
 - um ser Roxo e um ser Amarelo se fundem para formar um novo ser Verde;

Supondo que habitam este planeta 10 seres Roxos, 51 Amarelos e 23 Verdes, determine:

- a) Qual será a espécie sobrevivente quando cruzamentos não forem mais possíveis?
- b) Quantos nascimentos de seres Roxos acontecerão?
- c) Existe a possibilidade de que não ocorram nascimentos de seres Amarelos? E Verdes? Caso seja possível, determine quantos sobreviventes haverá em cada caso.

BOA PROVA!