Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR
Curso de Combinatória, Nível 3
1º semestre de 2019

Marcel Thadeu de Abreu e Souza
Vitor Emanuel Gulisz

Análise Combinatória: Permutações e Combinações

Antes de começar, recomendamos que faça os problemas 1 e 2, para você criar mais familiaridade com operações envolvendo fatoriais.

Permutações simples

Este é o caso em que os objetos que estão sendo permutados são todos diferentes. Já vimos na aula passada que vale o seguinte resultado:

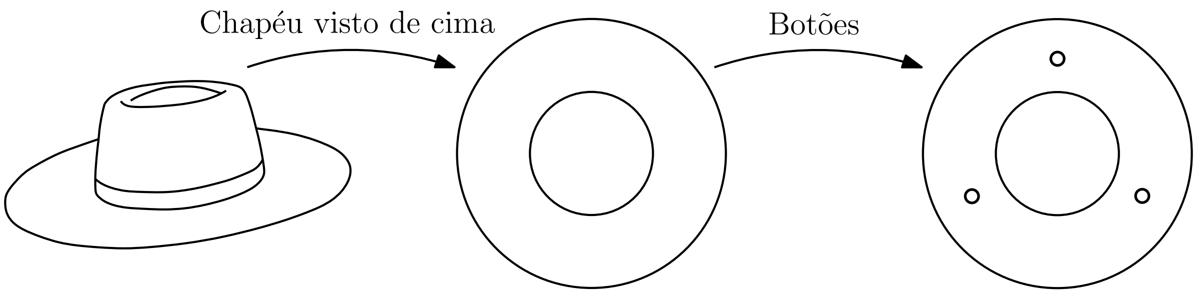
Existem $n!$ permutações entre n objetos diferentes.

Problemas recomendados: 3, 4 e 5

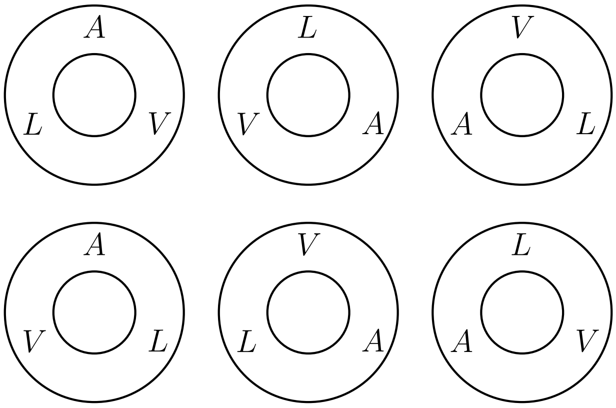
Permutações circulares

Exemplo 1. *Joana irá participar da festa junina de seu colégio, e para isso ela comprou um chapéu de palha redondo. Mas não há enfeites no chapéu, e então ela decidiu costurar 3 botões coloridos em torno da aba do chapéu (de modo simétrico). Se ela dispões de um botão azul (A), um verde (V) e um laranja (L), de quantos modos ela pode enfeitar o seu chapéu?*

Solução: Estamos supondo que o chapéu é simétrico. Além disso, Joana irá costurar os botões equiespaçados uns dos outros, ou seja, de modo simétrico (veja a figura abaixo).



A princípio, Joana teria $3! = 6$ possibilidades para costurar os botões (veja a figura abaixo).



Mas como o chapéu é simétrico, as três configurações que aparecem por primeiro são equivalentes, pois uma pode ser obtido da outra apenas girando o chapéu. E o mesmo acontece com as outras três configurações de baixo, isto é, elas também são equivalentes. Portanto, Joana pode enfeitar seu chapéu de apenas dois modos diferentes.

$\square$

Note que na contagem $3! = 6$ realizada no exemplo acima, contamos cada possibilidade exatamente 3 vezes, e assim a resposta é dada por $\dfrac{3!}{3} = 2$.

Em geral, temos o seguinte resultado:

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

$$\text{Resposta: } \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Podemos deduzir esta resposta do seguinte modo: se não considerássemos equivalentes as disposições que coincidem por rotação, então teríamos $n!$ possibilidades para distribuir os n objetos. Agora considere que as disposições que coincidem por rotação são equivalentes. Então contamos cada configuração exatamente n vezes, e logo a resposta é $n!$ dividido por n.

Problemas recomendados: 6, 7 e 8

Permutações com repetição

Exemplo 2. *Quantos anagramas a palavra BANANA possui?*

Solução: Note que temos letras iguais, então não podemos utilizar o resultado de permutações simples e dizer que o resultado é 6!. Contudo, podemos utilizar um truque para considerar as letras da palavra BANANA como se fossem todas distintas. Vamos indexar as duas letras N por N_1 e N_2, e as três letras A por A_1, A_2 e A_3. Agora temos 6 objetos distintos: B, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2. Portanto, existem 6! permutações entre estes objetos.

Mas veja que, por exemplo, os anagramas correspondentes a $\mathrm{N_1A_1N_2A_2BA_3}$, $\mathrm{N_2A_1N_1A_2BA_3}$ e $\mathrm{N_1A_3N_2A_1BA_2}$ resultam todos em NANABA, logo eles são equivalentes. Assim, temos que considerar estes casos para concluirmos quantos anagramas a palavra BANANA possui.

No exemplo acima, temos exatamente $3!\cdot 2! = 6\cdot 2 = 12$ objetos correspondentes ao anagrama NANABA, que correspondem a permutações entre os símbolos A_1, A_2 e A_3, e permutações dos símbolos N_1 e N_2. Vamos listar estes objetos abaixo:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{N_1A_1N_2A_2BA_3} & \mathrm{N_2A_1N_1A_2BA_3} \\
\mathrm{N_1A_1N_2A_3BA_2} & \mathrm{N_2A_1N_1A_3BA_2} \\
\mathrm{N_1A_2N_2A_1BA_3} & \mathrm{N_2A_2N_1A_1BA_3} \\
\mathrm{N_1A_2N_2A_3BA_1} & \mathrm{N_2A_2N_1A_3BA_1} \\
\mathrm{N_1A_3N_2A_1BA_2} & \mathrm{N_2A_3N_1A_1BA_2} \\
\mathrm{N_1A_3N_2A_2BA_1} & \mathrm{N_2A_3N_1A_2BA_1}
\end{array}$$

Isso significa que ao considerar as 6! permutações entre B, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2, contamos o anagrama NANABA 12 vezes. E isso acontece para todos os anagramas, isto é, contamos cada anagrama exatamente 12 vezes. Portanto, o número total de anagramas da palavra BANANA é dado por:

$$P_6^{3,2} = \binom{6}{3,2} = \frac{6!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60.$$

$\square$

Em geral, temos o seguinte resultado:

Considere n objetos que podem ser iguais. Digamos que existem k tipos diferentes de objetos, dentre os n. Se existem a_1 objetos do tipo 1, a_2 objetos do tipo 2, e assim por diante, e a_k objetos do tipo k, então temos $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, com $a_i \geq 1$, para $1 \leq i \leq k$. Neste caso, existem quantas permutações entre os n objetos?

$$\text{Resposta: } P_n^{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

Problemas recomendados: 9 até o 18

Combinações

Exemplo 3. *Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo irão conversar com o professor Ternaldo sobre um problema de Matemática. Eles chegaram à conclusão de que apenas 3 deles deveriam ir conversar com o Ternaldo. De quantos modos eles podem fazer isso?*

Solução: A princípio, eles poderiam fazer isso de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos. Contudo, a ordem em que eles são escolhidos para conversar com o professor Ternaldo não importa, assim teríamos menos possibilidades. Por exemplo, considere o caso em que o trio escolhido é formado por Arnaldo (A), Bernaldo (B) e Cernaldo (C). Ao contar as 60 possibilidades, estamos considerando que os casos ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA são diferentes. Mas estes 6 casos correspondem ao mesmo trio, logo são todos equivalentes.

De modo geral, contamos cada trio exatamente 6 vezes ao considerar as 60 permutações, que correspondem às permutações entre os integrantes do trio, pois podemos permutar cada trio de $3! = 6$ maneiras. Assim, a resposta é dada por:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

$\square$

Agora vejamos o caso geral:

De quantos modos podemos escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados, considerando que a ordem destes k objetos não importa? Ou equivalentemente, quantos são os subconjuntos de k elementos de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos?

$$\text{Resposta: } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Problemas recomendados: 19, 20, 21 e 22

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binominais, como mostrado acima.

Recomendamos que assista ao vídeo *The mathematical secrets of Pascal's triangle - Wajdi Mohamed Ratemi*, do canal do *Youtube* TED-Ed, que pode ser acessado clicando aqui.

Problemas recomendados: 23 e 24

Binômio de Newton

O Binômio de Newton é a potência da forma $(x+y)^n$, onde $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Podemos recorrer ao triângulo de Pascal para determinar os coeficientes binomiais dessa expansão. Temos então a seguinte relação:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Exemplo 4. *Determine o termo independente de x no desenvolvimento de*

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

Solução: O termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma

$$\binom{10}{k} \frac{(-1)^{10-k}(x^3)^k}{(x^2)^{10-k}} = \binom{10}{k}(-1)^{10-k}x^{5k-20}.$$

Para o termo independente de x, devemos ter $5k-20=0$, ou seja, $k=4$. Portanto, o coeficiente procurado é $\binom{10}{4}(-1)^6 = 210$.

$\square$

Exemplo 5. *Determine a soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de* $(x-2y)^{10}$.

Solução: Como vimos pela relação acima, temos que o termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma $\binom{10}{k}x^k(-2y)^{10-k}$. Ao substituirmos x e y por 1, obteremos apenas o coeficiente de cada termo. Logo a soma de todos eles é $(1-2)^{10} = 1$.

$\square$

Problemas recomendados: 25, 26 e 27

Problemas para aquecer

1. Simplifique as expressões abaixo.
   (a) $\dfrac{2018!}{2016!}$
   (b) $2018! + 2017!$
   (c) $\dfrac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$

2. Simplifique o produto $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$.

3. Quantos são os anagramas da palavra CAMELO?

4. Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

5. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 2, 3, 5 e 7, formando números de 4 dígitos. Qual é a soma dos números assim formados?

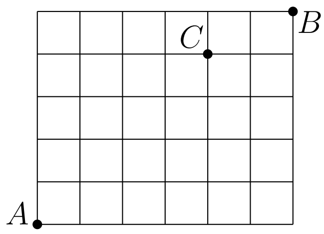
6. Maria tem tinta guache de 4 cores diferentes e quer pintar os quatros quadradinhos unitários de um quadrado de lado 2. De quantos modos ela pode fazer isso? Duas colorações são iguais se uma pode ser obtida a partir da outra através de uma rotação.

7. Quantas rodas de ciranda podem se formadas por 7 crianças?

8. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

9. Quantos anagramas a palavra BACANA possui?

10. A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



    (a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?
    (b) Quantos desses trajetos passam por C?

11. Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo $1cm$ para a esquerda ou para a direita a cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 8 movimentos terminados na posição de partida.

12. Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $x+y+z=5$?

13. Quantas soluções inteiras positivas possui a equação $x+y+z+w=11$?

14. Quantas soluções inteiras não negativas a inequação $x+y+z<5$ possui?

15. Quantos números de 6 algarismos maiores que 800.000 podem ser formados usando exatamente os algarismos $1, 1, 8, 9, 9, 9$?

16. De quantas maneiras é possível distribuir 30 bolas iguais entre 4 crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 6 bolas?

17. De quantas maneiras diferentes pode-se subir uma escada de 7 degraus, subindo um degrau ou dois degraus em cada passo?

18. Em um jogo de videogame é possível apertas os botões $\bigcirc$, $\times$, $\square$ e $\triangle$. Quantas sequências é possível obter

    (a) apertando 3 botões quaisquer?

    (b) apertando 3 botões de modo que cada sequência tenha exatamente dois botões de um mesmo tipo? Um exemplo seria $\square$ $\square$ $\triangle$.

    (c) apertando 4 vezes apenas os botões $\times$ e $\square$, ou $\bigcirc$ e $\triangle$?

19. Considere um grupo de 6 pessoas. Quantas duplas podemos formar a partir deste grupo?

20. Em uma turma do nono ano há 21 alunos. A professora de Matemática desta turma decidiu fazer uma avaliação sobre equações do segundo grau, e pediu para que os alunos se dividissem em trios. Quantas possibilidades de trios os alunos podem fazer?

21. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

22. Um baralho de um certo jogo de cartas possui n cartas distintas. Obtenha o valor de n sabendo que, com essas n cartas é possível obter 84 grupos diferentes de 3 cartas.

23. Mostre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

24. (Relação de Stifel). Prove que se $1 \leq k \leq n$, então $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

25. Determine o coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x-1)(x+3)^5$.

26. Determine a soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x - 13y)^{237}$.

27. Determine o valor de $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$.

Problemas mais desafiadores

28. Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

29. Um estacionamento possui 6 vagas, numeradas de 1 a 6, em fila. 6 motoristas possuem uma vaga favorita neste estacionamento. Quando cada motorista entra no estacionamento, ele dirige até sua vaga favorita. Se ela estiver vazia, ele estaciona ali. Senão, ele estaciona na próxima vaga vazia. Se todas as vagas entre a sua favorita e a sexta (última) tiverem sido tomadas, ele sai do estacionamento aborrecido. De $6^6 = 46.656$ escolhas de vagas favoritas que os motoristas podem fazer, quantas conduzem todos os motoristas a estacionarem com êxito?

30. Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar original?

31. Prove que a soma de todos os coeficientes da fila n-ésima do triângulo de Pascal é duas vezes a soma dos coeficientes da fila anterior.

32. Prove que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, onde $n \geq 1$.

33. Prove que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$, onde $n \geq 1$, $k \geq 0$.

34. Prove que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$, onde $n \geq 1$, $k \geq 0$.

Bibliografia

1. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, 1991.

Respostas

1. (a) $2018 \cdot 2017$
   (b) $2019 \cdot 2017!$
   (c) $\dfrac{1}{(n+1)}$
2. $2^{10} \cdot 10!$
3. 720
4. 720
5. 113.322
6. 6
7. 720
8. 480
9. 120
10. (a) 462
    (b) 210
11. 70
12. 21
13. 120
14. 35
15. 40
16. 84
17. 21
18. (a) 64
    (b) 36
    (c) 32
19. 15
20. 1330
21. 661.500
22. 9
23. Use a fórmula de combinação.
24. Use a fórmula de combinação.
25. 180
26. 1
27. $2690\sqrt{5}$
28. 220
29. 16.807
30. 265