

Exemplos e Contra-Exemplos

Você que já tentou resolver alguns problemas de provas anteriores de Olimpíada de Matemática deve ter percebido que é frequente perguntas na quais questiona-se a existência de uma determinada propriedade. Por exemplo: *Existe alguma potência de dois que é soma de duas potências de três?* De imediato, podemos perceber que esta pergunta tem duas possíveis respostas: “É possível” ou “Não é possível”.

Se a resposta for afirmativa, o aluno deverá justificá-la usando algum exemplo. Se não for possível, a demonstração deverá ser feita usando algum argumento (geralmente empregando ideias de demonstração por absurdo como vimos em uma aula anterior). Agora considere a seguinte lista de exercícios propostos.

Problema 1. Mostre que os números de 1 a 16 podem ser escritos em uma linha reta de modo que a soma de quaisquer dois números consecutivos seja um quadrado perfeito.

Solução. Vamos escrever todos os quadrados perfeitos até 25 que são soma de dois números que estão entre 1 e 16 (inclusive).

$$\begin{array}{llll} 1 + 3 = 4 & 1 + 8 = 9 & 1 + 15 = 16 & 9 + 16 = 25 \\ & 2 + 7 = 9 & 2 + 14 = 16 & 10 + 15 = 25 \\ & 3 + 6 = 9 & 3 + 13 = 16 & 11 + 14 = 25 \\ & 4 + 5 = 9 & 4 + 12 = 16 & 12 + 13 = 25 \\ & & 5 + 11 = 16 & \\ & & 6 + 10 = 16 & \\ & & 7 + 9 = 16 & \end{array}$$

Note que 8 e 16 são os únicos números que aparecem uma única vez. Logo, o primeiro número deve ser 8 e o último deve ser 16, ou o contrário. Assim, pela somas acima, temos a sequência:

$$8 - 1 - 15 - 10 - 6 - 3 - 13 - 12 - 4 - 5 - 11 - 14 - 2 - 7 - 9 - 16$$

□

Problema 2. No quadriculado abaixo estão escritos todos os inteiros de 1 a 25. Considere todos os conjuntos formados por cinco desses números, de modo que, para cada conjunto, não existem dois números que estão na mesma linha ou na mesma coluna.

2	13	16	11	23
15	1	9	7	10
14	12	21	24	8
3	25	22	18	4
20	19	6	5	17

- a) Apresente um conjunto no qual o maior elemento seja o 23.
 b) Apresente um conjunto no qual o maior elemento seja o menor possível.

Solução.

- a) Considere o conjunto $\{23, 7, 21, 3, 19\}$.
 b) Observe que devemos escolher um número pertencente à terceira linha e que o menor número desta linha é o 8. Então suponha que exista algum conjunto como mencionado no enunciado em que 8 é o elemento máximo. Neste caso, também devemos escolher algum número na quarta linha (que não pode ser o 4 pois este número está na mesma coluna do 8). Então devemos escolher o 3, para manter 8 como elemento máximo. Devemos escolher algum elemento na primeira linha, que não pode ser 2 por este se encontrar na mesma coluna do 3. Portanto, devemos escolher um número na primeira linha que será maior do que 8. **Contradição.** Nosso próximo candidato é o segundo menor elemento da terceira linha: 12. Para verificar que 12 é a solução, basta observar o exemplo $\{2, 12, 9, 5, 4\}$. □

Problema 3. Um número n é dito azul se a soma de seus dígitos for igual à soma dos dígitos de $3n + 11$. Prove que existem infinitos números azuis.

Solução. Um exemplo de número azul é 17. Veja que a soma de seus dígitos é 8 e a soma dos dígitos de $3 \cdot 17 + 11 = 62$ também é 8. Agora, a ideia é construir vários exemplos utilizando o caso inicial como base. Para tanto, considere os números da forma

$$1 \underbrace{000 \dots 00}_n 7.$$

A soma dos dígitos é 8 e a soma dos dígitos de

$$3 \cdot 1 \underbrace{000 \dots 00}_n 7 + 11 = 3 \underbrace{000 \dots 00}_{n-1} 32$$

também é 8. Logo, existem infinitos números inteiros azuis. □

Problema 4. É possível distribuir todos os números inteiros de 1 a 30 nas casas de um tabuleiro 5×6 (5 linhas e 6 colunas), um por casa, de modo que:

- a) todas as colunas possuam a mesma soma?
- b) todas as linha possuam a mesma soma?

Em cada item, se for possível, construa um exemplo. Se não for possível, justifique.

Solução.

- a) Veja que a soma de todos os números de 1 a 30 é 465, um número que não é divisível por 6. Portanto, é impossível dividi-los em seis grupos de mesma soma.
- b) Neste caso é possível. Podemos utilizar o seguinte exemplo como justificativa:

1	10	11	20	21	30
2	9	12	19	22	29
3	8	13	18	23	28
4	7	14	17	24	27
5	6	15	16	25	26

□

Problemas Propostos

Problema 5. Mostre que os números de 1 a 16 não podem ser escritos em um círculo de modo que a soma de quaisquer dois números consecutivos seja um quadrado perfeito.

Problema 6. É possível distribuir todos os números de 1 a 18 em nove pares do tipo (a, b) de modo que $a + b$ seja sempre um quadrado perfeito?

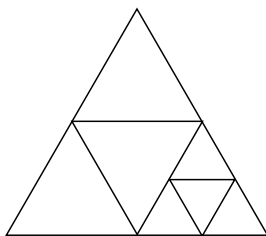
Problema 7. Como cortar um retângulo 13×7 em treze retângulos diferentes?

Problema 8. Mostre como cortar o tabuleiro abaixo em quatro partes iguais de modo que cada parte possua exatamente um **x**.

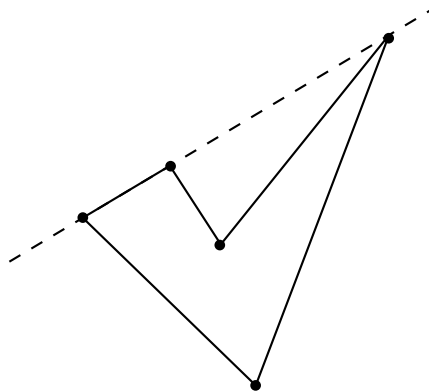
		X	
X	X	X	

Problema 9. Um rei deseja construir seis fortalezas e conectar quaisquer duas delas através de uma estrada. Mostre como ele poderá dispor as fortalezas e as estradas de modo que existam no máximo três interseções entre estradas.

Problema 10. Um triângulo equilátero pode ser recortado em triângulos equiláteros menores. A figura abaixo mostra como recortá-lo em sete triângulos equiláteros. Mostre como recortar um triângulo equilátero em vinte triângulos equiláteros menores.



Problema 11. Dentre os polígonos de cinco lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir. Qual é a



maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lado poderá ter?

Atenção: Além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que esse.

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da página da Olimpíada Brasileira de Matemática (www.obm.org.br). Outros livros que também podem servir como apoio são:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience** (Mathematical World, Vol. 7). Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.
2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991** (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1). Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

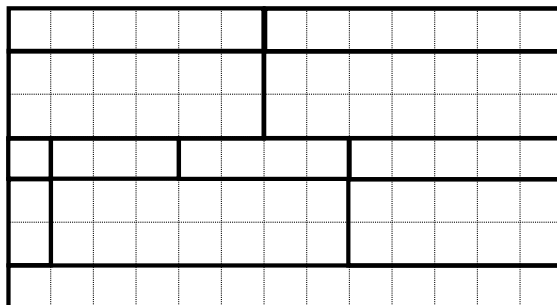
Dicas e Soluções

5. Considere a tabela feita na solução do Problema 1. Veja que não existem dois números x e y entre 1 e 16 tais que $8 + x$ e $8 + y$ sejam ambos quadrados perfeitos. Dessa forma, é impossível fazer o que se pede. $\square$
6. Podemos considerar a tabela da solução do Problema 1, acrescentando os pares em que um dos elementos é 18 ou 17, ficando com:

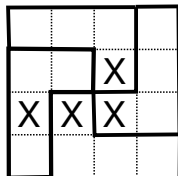
$$\begin{array}{llll}
 1 + 3 = 4 & 1 + 8 = 9 & 1 + 15 = 16 & 9 + 16 = 25 \\
 & 2 + 7 = 9 & 2 + 14 = 16 & 10 + 15 = 25 \\
 & 3 + 6 = 9 & 3 + 13 = 16 & 11 + 14 = 25 \\
 & 4 + 5 = 9 & 4 + 12 = 16 & 12 + 13 = 25 \\
 & & 5 + 11 = 16 & \\
 & & 6 + 10 = 16 & 7 + 18 = 25 \\
 & & 7 + 9 = 16 & 8 + 17 = 25
 \end{array}$$

Como 18, 17 e 16 aparecem apenas em uma única possibilidade, já sabemos quais números devem ser seus respectivos pares. São (18, 7), (17, 8) e (16, 9). Para completar os demais pares da lista, basta observar as seis primeiras somas da terceira coluna e daí retirar os demais pares. $\square$

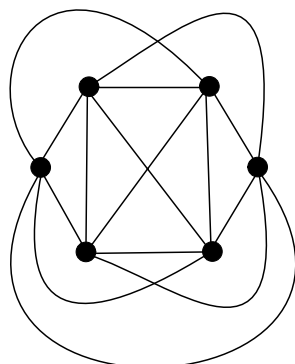
7. Veja o exemplo a seguir:



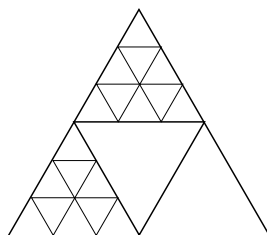
8. Veja o exemplo a seguir:



9. Veja o exemplo a seguir:



10. Considere o exemplo a seguir:



11. Veja que não podemos ter três vértices consecutivos do polígono sobre uma mesma reta. Caso contrário, o polígono teria um ângulo 180° . Portanto, o máximo de vértices alinhados é $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$. Para confirmar que este é realmente o número máximo, considere o exemplo a seguir:

