Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Múltiplos, Divisores e Primos - Aula 02

Nessa lista vamos explorar conceitos básicos de divisão Euclidiana, múltiplos, divisores e primos.

Quando dividimos o número 7 pelo número 3, obtemos um quociente 2 e um resto 1. Podemos transformar essa divisão na equação $7 = 3 \times 2 + 1$. De um modo mais geral, ao dividirmos um número a por um número b, obtemos um quociente q e um resto r.

$$a = b \times q + r \tag{1}$$

Perceba que o resto não pode assumir qualquer valor, por exemplo, na divisão por 3 os restos possíveis são 0, 1 ou 2, em outras palavras, o resto pode ir de 0 até o número anterior ao divisor. Portanto, ao dividirmos por b, os restos possíveis são 0, 1, 2, $\cdots$, $b-1$.

Um caso muito especial acontece quando o resto da divisão é zero. A equação anterior fica:

$$a = b \times q \tag{2}$$

Dessa expressão podemos fazer quatro definições, que são equivalentes:

- a é **múltiplo** de b
- a é **divisível** por b
- b é **divisor** de a
- b é **fator** de a

Assim, um número primo pode ser definido como um número p que possui exatamente dois divisores positivos: 1 e p. São primos os números 2, 3, 5, 7, 11, $\cdots$ enquanto que 4 não é primo já que possui como divisores positivos 1, 2 e 4, assim como 6 também não é já que possui como divisores positivos 1, 2, 3 e 6. Números que podem ser representados como o produto de pelo menos dois números primos são chamados de números compostos, como exemplo temos $4 = 2 \times 2$ ou $12 = 2 \times 2 \times 3$.

Problema 1. (OBM 1^a Fase) A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale $a + b + c$?

Solução. Como $a+b = 34$, que é um número par, ou a e b são pares, ou são ambos ímpares, como o único primo par é 2, teríamos $a + b = 4$, portanto a e b são ímpares. Com a mesma análise verificamos que, como $a + c = 33$, então temos um número par e um número ímpar entre a e c, e como anteriormente verificamos que a é ímpar, então c é um número primo par, logo $c = 2$, portanto: $a + c = 33 \Leftrightarrow a + 2 = 33 \Leftrightarrow a = 31$. Substituindo na outra equação temos: $a + b = 34 \Leftrightarrow 31 + b = 34 \Leftrightarrow b = 3$ Finalmente, $a + b + c = 31 + 3 + 2 = 36$.

Problema 2. (OBM 1^a Fase) Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?

a) 712

b) 548

c) 1026

d) 1456

e) 1680

Solução. Uma ideia para resolver esse problema é fatorar cada uma das alternativas para verificar se podemos escrever tal número como um produto de quatro números consecutivos. De fato a alternativa e) dá a resposta, já que $1680 = 24.3.5.7 = 5.6.7.8$.

Como essa resolução pode demorar muito, podemos fazer de outra maneira. Perceba que o produto de números consecutivos cresce muito rápido. Outra solução possível seria ir testando o produto de quatro números consecutivos até encontrar uma das alternativas, nesse caso começaríamos com $1.2.3.4 = 24$, depois tentaríamos $2.3.4.5 = 120$, o próximo é $3.4.5.6 = 360$, $4.5.6.7 = 840$, e finalmente $5.6.7.8 = 1680$.

Por último, vamos considerar uma ideia mais elaborada. Da resolução anterior podemos perceber que no produto de quatro números consecutivos sempre teremos pelo menos um número múltiplo de 3 (veja que aparece o 3 e depois começa a aparecer o 6), um número múltiplo de 4 (veja que quando o 4 para de aparecer, o 8 aparece) e um número par que não é múltiplo de 4, em outras palavras, um múltiplo de 2 (o 2 aparece no começo, ai aparece o 6). Resumidamente, um múltiplo simultâneo de 2, 3 e 4 é um múltiplo de $2.3.4 = 24$. Podemos pegar cada alternativa e ver qual desses números é divisível por 24.

Problema 3. (OBM 1^a Fase) Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma para ela?
Solução. Dividindo 237 por 31 obtemos quociente 7 e resto 20, ou seja, se a professora conseguir uma quantidade tal que, somada com 20 dê 31, então ela consegue entregar mais uma bala para cada aluno. Portanto a professora precisa de 11 balas a mais.

Problema 4. Em um certo ano, Janeiro tinha exatamente quatro terças-feiras e quatro sábados. Em que dia da semana caiu o dia 1 de Janeiro?
Solução. Uma ideia para resolver esse problema é desenhar um calendário do mês de janeiro com 31 dias. Veja que a diferença de sábado para terça-feira são apenas 3 dias, como janeiro possui 31 dias isso quer dizer que podemos montar 4 sequências de 7 dias e sobram ainda 3 dias ($31 = 4.7 + 3$), ou seja, como esse mês de janeiro possui exatamente

quatro terças e quatro sábados, os 3 dias restantes só podem ser quarta-feira, quinta-feira e sexta-feira. Montando esse calendário de janeiro verificamos que dia 1 de Janeiro é uma quarta-feira.

1 Problemas

Múltiplos, Divisores e Primos: Problemas Introdutórios

Problema 5. Sabendo-se que $9174532 \times 13 = 119268916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:

a) 119268903

b) 119268907

c) 119268911

d) 119268913

e) 119268923

Problema 6. Em 2006, o primeiro dia do ano foi um domingo, o primeiro dia da semana. Qual é o próximo ano em que isso ocorrerá?

Considere que os anos não bissextos têm 365 dias e os bissextos têm 366 dias. São bissextos:

- os anos que são múltiplos de 4 e não são múltiplos de 100;
- os anos que são múltiplos de 400.

Por exemplo, 1996 e 2000 foram anos bissextos e 1900 não foi um ano bissexto.

Problema 7. A Páscoa é celebrada no primeiro domingo após a primeira Lua cheia do Outono e pode ocorrer entre 22 de março e 25 de abril. Existem vários métodos para determinar o dia em que o domingo de Páscoa cai. Um deles é o método de Gauss, descrito a seguir para os anos no intervalo de 1901 a 2099. Sejam

- A o resto da divisão do ano por 19;
- B o resto da divisão do ano por 4;
- C o resto da divisão do ano por 7;
- D o resto da divisão de $19A + 24$ por 30;
- E o resto da divisão de $2B + 4C + 6D + 5$ por 7;

Desta forma:

- Se $D+E>9$, então o dia é $D+E-9$ e o mês é abril.
- Caso contrário, o dia é $D+E+22$ e o mês é março.

Em que dia e mês será o domingo de Páscoa em 2077, ano do centenário da OPM?

Múltiplos, Divisores e Primos: Problemas Propostos

Problema 8. Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?

Problema 9. Um conjunto de inteiros positivos, dois a dois distintos, é chamado *auto-divisor* se a soma de todos os seus elementos é múltiplo de cada um de seus elementos. Por exemplo, $\{1;2;3\}$ é um conjunto auto-divisor com 3 elementos, pois $1+2+3=6$ é múltiplo de 1, 2 e 3.

Agora é sua vez! Invente um conjunto auto-divisor com

(a) 4 elementos.

(b) 5 elementos.

(c) 10 elementos.

Problema 10. A primeira fase da OBM de 2008 se realizou no dia 14 de junho, um sábado do ano bissexto 2008.

Problema 11. O número 1000...02 tem 20 zeros. Qual é a soma dos algarismos do número que obtemos como quociente quando dividimos esse número por 3?

Problema 12. Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

Problema 13. Você conhece o critério de divisibilidade por 11? Veja só:

- O número 93918 é divisível por 11 pois $8-1+9-3+9=22$ e 22 é divisível por 11;
- O número 4851 é divisével por 11 pois $1-5+8-4=0$ e 0 é divisível por 11;
- O número 63502 não é divisível por 11 pois $2-0+5-3+6=10$ que não é divisível por 11.

a) Qual é o menor número natural de 5 algarismos que é divisível por 11?

b) Qual é o menor número natural de 5 algarismos distintos que é divisível por 11?

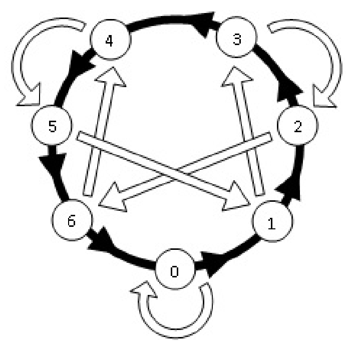
Problema 14. Vamos chamar de selo de um número inteiro positivo o par $(x;y)$ no qual x é o número de divisores positivos desse número menores do que ele e y é a soma desses divisores. Por exemplo, o selo do número 10 é $(3;8)$ pois o número 10 tem como divisores menores do que ele os números 1, 2 e 5, cuja soma é 8. Já o selo do número primo 13 é $(1;1)$.

a) Qual é o selo do número 9?

b) Qual número tem o selo $(2;3)$?

c) Há números cujo selo é $(6;m)$. Qual é o menor valor possível para m?

Problema 15. Neste problema vamos mostrar uma forma de calcular o resto da divisão de um número inteiro positivo por 7. Considere a figura a seguir, com os restos que um número inteiro pode deixar na divisão euclidiana por 7 e algumas flechinhas pretas ou brancas entre eles. Para descobrir o resto da divisão de um número qualquer n por 7, fazemos o seguinte: partimos do zero e seguimos o caminho indicado por x_1 flechas pretas, sendo x_1 o algarismo mais á esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_2 flechas pretas, sendo x_2 o segundo algarismo mais á esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_3 flechas pretas, sendo x_3 o terceiro algarismo mais á esquerda de n e assim por diante até seguir a quantidade de flechas pretas indicada pelo algarismo das unidades de n e terminar em algum dos restos de 0 a 6. O número no qual terminarmos é o resto da divisão de n por 7.



Por exemplo, para $n = 3401$:

- Partimos do 0 e seguimos por 3 flechas pretas, chegando em 3.
- Seguimos uma flecha branca para 2 e, então, seguimos por 4 flechas pretas, chegando em 6.
- Seguimos uma flecha branca para 4 e, então, seguimos por 0 flecha preta (ou seja, ficamos na mesma posição), continuando em 4.
- Seguimos uma flecha branca para 5 e, então, seguimos por 1 flecha preta, chegando em 6.
- Podemos concluir que 6 é o resto da divisão de 3401 por 7.

a) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 4288 por 7. Seguindo o modelo acima, descreva os passos para obtenção do resto.

b) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 102010 por 7. Não é necessário descrever todos os 2011 passos, mas não se esqueça de justificar a sua resposta.

Problema 16. Neste problema, vamos apresentar um método de fatoração criado por Pierre de Fermat. O método consiste em tentar escrever n como a diferença de dois quadrados:

$$n = x^2 - y^2$$

Para isto atribuímos a x o primeiro inteiro maior ou igual a $\sqrt{n}$. Então, testamos se

$$y = \sqrt{x^2 - n}$$

é inteiro. Caso y seja inteiro, utilizamos a fatoração $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$ para fatorar n. Senão, aumentamos o valor de x em 1 e repetimos o procedimento.

Por exemplo, se $n = 7303$, temos $\sqrt{n} = 85{,}45\ldots$, logo fazemos $x = 86$. Como $y = \sqrt{x^2 - n} = \sqrt{86^2 - 7303} = \sqrt{93}$ não é inteiro, aumentamos o valor de x em 1 e tentamos novamente. Para $x = 87$, temos $y = \sqrt{87^2 - 7303} = \sqrt{266}$. Então fazemos $x = 88$ e agora $y = \sqrt{88^2 - 7303} = \sqrt{441} = 21$, que é um inteiro e o procedimento termina.

Para obter a fatoração, observe que

$$21 = \sqrt{88^2 - 7303} \iff 21^2 = 88^2 - 7303$$

$$\iff 7303 = 88^2 - 21^2 = (88 - 21)(88 + 21) = 67 \cdot 109$$

Assim, $7303 = 67 \cdot 109$ que é, portanto, composto.

Agora é a sua vez: mostre que $n = 84587$ é um número composto. Utilize calculadora!

Problema 17. O truque favorito do grande matemágico Benjamini é o seguinte:

- Ele pede para uma pessoa na plateia pensar em um número de sete algarismos. Esse número não deve ser revelado
- Então pede para ela inverter o número (primeiro algarismo vira o último, o segundo vira o penúltimo e assim por diante) e subtrair o maior do menor (pode usar lápis e papel, pois a conta é grande). Nada é revelado ainda.
- Finalmente pede para a pessoa convidada ir falando na ordem os sete algarismos obtidos (mesmo os possíveis zeros á esquerda devem ser falados), sendo que um dos algarismos ela não deve dizer, desafiando Benjamini com "Descubra!".
- Após o convidado concluir a sua participação, para espanto de todos, Benjamini imediatamente diz o algarismo que ele não falou.

Por exemplo:

- A pessoa escolhe o número 2485772.
- O número invertido é 2775842. Subtraindo: $2775842 - 2485772 = 0290070$.
- O convidado, então, diz Zero, Dois, Nove, Zero, Zero, Descubra!, Zero.
- E o triunfante Benjamini, diz de imediato "Sete!", recebendo as suas merecidas palmas.

O segredo de Benjamini é que ele sabe que o número obtido após a subtração deve ser múltiplo de onze. E sabe também o critério de divisibilidade por onze: Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ a representação decimal de um número inteiro n. O número n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ é múltiplo de 11. Por exemplo: 4770216 é múltiplo de 11, pois $(6+2+7+4)-(1+0+7)=11$ é um múltiplo de 11; já 5672109 não é múltiplo de 11, pois $(9+1+7+5)-(0+2+6)=14$ não é múltiplo de 11.

Explicando o truque: 0290070 é múltiplo de 11, pois $(0+0+9+0)-(7+0+2)=0$ que é múltiplo de 11.

a) Um membro da plateia disse: Quatro, Três, Dois, Zero, Descubra!, Cinco, Cinco. Faça como o grande Benjamini e determine o algarismo que falta.

b) Um outro membro da plateia disse: Seis, Zero, Oito, Descubra!, Zero, Oito, Quatro. E Benjamini, para surpresa de todos, afirmou que não diria o algarismo porque o resultado da conta estava errado! Baseado no critério de divisibilidade por onze, explique mais esse mistério envolvendo o maior dos matemágicos.

Problema 18. Frações redutíveis e irredutíveis:

a) Algumas vezes, quando somamos frações irredutíveis, obtemos uma fração que pode ser simplificada, ou seja, redutível. Por exemplo, $\frac{4}{21} + \frac{1}{13} = \frac{4.5 + 1.7}{105}$ é uma fração equivalente a $\frac{9}{25}$. Notando que $2009 = 7^2.41$, concluímos que, ao somarmos as frações irredutíveis $\frac{a}{2009}$ e $\frac{b}{41}$, obtemos a fração $\frac{a+49b}{2009}$. Exiba inteiros positivos a e b de modo que tal fração seja redutível.

b) Acontece também de termos como resultado uma fração irredutível; por exemplo, $\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5.3 + 7.2}{36} = \frac{29}{36}$. Mais ainda, pode-se demonstrar que, para alguns pares de denominadores, é impossível obter como resposta uma fração que possa ser simplificada. Sejam $\frac{x}{12}$ e $\frac{y}{18}$ frações irredutíveis. Mostre que a fração obtida ao calcular $\frac{x}{12} + \frac{y}{18}$ será sempre irredutível.

Problema 19. No jogo denominado "Chomp", dois jogadores, Arnaldo e Bernaldo, dizem alternadamente divisores de um número N dado inicialmente. Os números ditos não podem ser múltiplos de nenhum dos números escolhidos anteriormente. Perde quem escolher o número 1.

Por exemplo, sendo $N = 432 = 2^4 \cdot 3^3$, um jogo possível é

- Arnaldo escolhe 36;
- Bernaldo escolhe 6 (Observe que ele não poderia escolher $72 = 2 \cdot 36$, $108 = 3 \cdot 36$, $144 = 4 \cdot 36$, $216 = 6 \cdot 36$, $432 = 12 \cdot 36$ e nem o próprio $36 = 1 \cdot 36$.);
- Arnaldo escolhe 16; Bernaldo escolhe 4; Arnaldo escolhe 9; Bernaldo escolhe 3; Arnaldo escolhe 2; Bernaldo escolhe 1, perdendo. Arnaldo é o vencedor!

Uma maneira de visualizar o que está ocorrendo no jogo é desenhar uma barra de chocolate formada por quadradinhos numerados com os divisores de N. E, então, imaginar que os jogadores estão comendo os quadradinhos abaixo e à direita dos números que escolhem. O quadradinho 1 está envenenado! Para o nosso exemplo, teríamos:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

(Mostramos no desenho os quadradinhos que Arnaldo comeria na sua primeira jogada, 36, 72, 108, 144, 216 e 432. Bernaldo, na sua primeira jogada, comeria os quadradinhos 6, 12, 18, 24, 48 e 54.)

Considere agora $N = 10000 = 2^4 \cdot 5^4$.

(a) Desenhe a barra de chocolate correspondente.

(b) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo 10, ele consegue vencer o jogo, não importando quais números Bernaldo escolha.

(c) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo qualquer número diferente de 10, Bernaldo consegue vencer o jogo.

Múltiplos, Divisores e Primos: Soluções dos Introdutórios

5) (OBM 1^a Fase) Como 119268916 é divisível por 13, já que $9174532 \times 13 = 119268916$, podemos concluir que os números da forma $119268916 + x$, para x inteiro, são divisíveis por 13 se, e somente se, x é divisível por 13. Dentre os números apresentados, o número $119268916 + (-13) = 119268903$ é o único divisível por 13.

6) (OPM Fase Inicial) Como 2006 não é bissexto, tem 365 dias e, como $365 = 52 \times 7 + 1$, o primeiro dia do ano de 2007 será uma segunda-feira, um dia a frente do que aconteceu em 2006. E o mesmo no ano seguinte, ou seja, o primeiro dia do ano de 2008 será uma terça-feira, um dia a frente do que aconteceu em 2007. Já 2008 á bissexto. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, o primeiro dia do ano de 2009 será uma quinta-feira, dois dias a frente do que aconteceu em 2008. Como 2009, 2010 e 2011 não são bissextos, os primeiros dias de 2010, 2011 e 2012 serão, respectivamente, uma sexta-feira, um sábado e um domingo. Portanto a próxima vez que o ano iniciará em um domingo será em 2012.

7) (OPM Fase Inicial) Efetuando-se as divisões, temos $A = 6$, $B = 1$ e $C = 5$. Logo $19A + 24 = 138$ e $D = 18$, além de $2B + 4C + 6D + 5 = 135$ e $E = 2$. Como $D + E = 20 > 9$, o domingo de Páscoa em 2077 será no dia $D + E - 9 = 11$ e no mês de abril.

   Observação: existem dois casos particulares neste período: 2049 e 2076. Quando o domingo de Páscoa, de acordo com a regra citada, cair em Abril e o dia for 26, o dia é corrigido para 19. E quando o domingo de Páscoa cair em Abril e o dia for 25, o dia é corrigido para 18.

Múltiplos, Divisores e Primos: Soluções dos Propostos

8) (OBM 1^a Fase) Seja $A = 15p + 7$. Como $\dfrac{A}{3} = \dfrac{15p+7}{3} = 5p + \dfrac{7}{3}$, concluímos que o resto da divisão de A por 3 é igual ao resto da divisão de 7 por 3, ou seja, 1. De forma análoga, o resto da divisão de A por 5 é o mesmo que o da divisão de 7 por 5, ou seja, igual a 2. A soma desses restos é igual a $1 + 2 = 3$.

9) (OPM Fase Inicial)

   (a) $\{1, 2, 3, 6\}$

   (b) $\{1, 2, 3, 6, 12\}$

   (c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384\}$

   Esses são alguns exemplos. Há outros conjuntos que cumprem as condições impostas pelo problema.

10) (OBM 1^a Fase) Perceba que ao dividirmos 365 por 7 obtemos resto 1, portanto ao dividirmos 366 por 7 obtemos resto 2. Em outras palavras, se o resto dessa divisão fosse zero, então o próximo ano começaria no mesmo dia da semana, e como num ano regular temos resto 1, temos que o ano seguinte começa no dia da semana seguinte. É verdade que 14 de junho de 2008 é um sábado. Logo 14 de junho de 2009 será um domingo, de 2010 será uma segunda-feira, de 2011 será uma terça-feira, de 2012 (que é bissexto) será uma quinta-feira, de 2013 será uma sexta-feira e, finalmente, de 2014 será um sábado. Portanto a próxima vez que o dia 14 de junho será num sábado e acontecerá daqui a 6 anos.

11) (OBM 2^a Fase) O quociente da divisão de 102 por 3 é 34, de 1002 por 3 é 334, de 10002 por 3 é 3334, etc. Assim, o quociente da divisão de 10...02, com vinte algarismos zero, por 3, é igual a 33...34, com vinte algarismos três. Logo a soma dos algarismos do quociente é $20 \times 3 + 4 = 64$.

12) (OBM 1^a Fase) Como 365 dividido por 7 dá quociente 52 e resto 1 e 366 dividido por 7 dá o mesmo quociente e resto 2, em um ano, bissexto ou não, há no máximo 53 domingos. Um mês tem entre $28 = 4 \times 7$ e $31 = 4 \times 7 + 3$ dias, então todo mês tem 4 ou 5 domingos. Como 53 dividido por 12 dá quociente 4 e resto 5, há no máximo 5 meses com 5 domingos. Um exemplo de ano com cinco meses com cinco domingos é um iniciado no domingo.

13) (OPM Fase Final)

    a) Fazemos primeiramente $\dfrac{10000}{11}$ para obtermos quociente 909 e resto 1. Isso significa que $909 \times 11 = 9999$ se somarmos 11 teremos $909 \times 11 + 11 = 9999 + 11$, ou seja, $910 \times 11 = 10010$ que é um múltiplo de 11.

    b) Comecemos pelo menor número de três algarismos distintos que é 10234, a partir dele utilizamos a ideia do enunciados do critério de divisibilidade por 11, aumentando sempre o algarismo das unidades de 1 em 1 para ver se funciona. $4 - 3 + 2 - 0 + 1$ até $9 - 3 + 2 - 0 + 1$ não terá efeito, mudamos a casa das dezenas para 4 e a unidade corretamente para perceber que $3 - 4 + 2 - 0 + 1$ até $9 - 4 + 2 - 0 + 1$ não terá efeito. Utilizamos essa ideia até chegarmos em $3 - 6 + 2 - 0 + 1$ que dará zero. Logo o número pedido é 10263. Outra maneira de fazer o problema é tomar o número 10200 e ver o múltiplo de 11 mais próximo, a partir daí ir somando 11 e ver quando os cinco dígitos são distintos.

14) (OBM 2^a Fase)

    a) Os divisores positivos de 9 menores que 9 são 1 e 3, logo o selo do número 9 é o par $(2; 4)$.

    b) Observe que todo número inteiro positivo tem 1 como divisor. Como o número que estamos procurando tem apenas dois divisores menores que ele, 1 terá que ser um desses divisores e como a soma dos dois divisores é 3, então o outro divisor deve ser 2. Como não há outros divisores, então o número que procuramos é uma potência de 2, e para ter apenas dois divisores menores que ele próprio, então o número deve ser 4.

c) Seja n um número com selo $(6; m)$. n possui 7 divisores contando com ele próprio, logo a única possibilidade é que ele seja da forma p^6, com p primo, e m é igual a $1 + p + p^2 + \cdots + p^5$. Para que m seja mínimo, p terá que ser mínimo, logo $p = 2$ e $m = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 63$.

15) (OPM Fase Inicial)

a) Partimos do 0 e seguimos por 4 flechas pretas até 4. Seguimos uma flecha branca até 5 e depois por 2 flechas pretas até 0. Seguimos uma flecha branca até 0 e depois por 8 flechas pretas até 1. Seguimos uma flecha branca até 3 e depois por 8 flechas pretas até 4, que é o resto da divisão de 4288 por 7.

b) Partimos do 0 e seguimos por 1 flecha preta até 1. A partir de agora, seguiremos apenas por flechas brancas, num total de 2010 passos: de 1 a 3, de 3 a 2, de 2 a 6, de 6 a 4, de 4 a 5, e 5 a 1. Note agora que cada 6 passos seguidos que executarmos nos levará de volta ao 1. Como 2010 é múltiplo de 6, ao final dos passos chegaremos no 1, e esse é o resto da divisão de 102010 por 7.

16) (OPM Fase Final) Temos $\sqrt{n} = 290{,}8\ldots$, portanto começamos com $x = 291$. A tabela a seguir resume os cálculos

x	$x^2 - n$
291	94
292	677
293	1262
294	1849

Veja que, como um quadrado perfeito não pode terminar em 2 ou 7, somente o primeiro e o último valores devem ser verificados. Apenas o último é um quadrado perfeito: $1849 = 43^2$. Logo

$$n = 294^2 - 43^2 = (294 - 43)(294 + 43) = 251 \cdot 337$$

17) (OPM Fase Inicial)

a) Aplicando o critério apresentado, sendo x o valor do algarismo não dito a Benjamini, temos que $(5 + x + 2 + 4) - (5 + 0 + 3)$ deve ser um múltiplo de onze, ou seja, $11 + x - 8 = 3 + x$ deve ser um múltiplo de onze. Como x é um algarismo, $x = 8$.

b) Aplicando novamente o critério, sendo x o valor do algarismo não dito a Benjamini, temos que $(4 + 0 + 8 + 6) - (8 + x + 0)$ deve ser um múltiplo de onze, ou seja, $18 - 8 - x = 10 - x$ deve ser um múltiplo de onze. Como x é um algarismo, os possíveis valores de $10 - x$ são os números de 1 a 10, e não há múltiplos de 11 nesse intervalo. Como o resultado deve ser múltiplo de onze, nenhum dos possíveis valores de x pode ocupar o lugar de "Descubra!" e, portanto, o convidado errou uma conta.

18) (OPM Fase Final)

a) Como a fração $\frac{a+49b}{2009}$ deve ser irredutível, temos que $a+49b$ deve ser múltimplo de 7 ou de 41. Mas $\frac{a}{2009}$ é irredutível; logo a não pode ser múltiplo de 7 e, consequentemente, $a+49b$ também não. Assim, $a+49b$ deve ser múltitplo de 41, ou seja, $a+49b=41k$, para k inteiro positivo. Vale observar que 7 não divide a, 6 não divide b e 7 não divide k. A tabela a seguir mostra alguns exemplos de valores para a e para b:

b) Temos $\frac{x}{12}+\frac{y}{18}=\frac{3x+2y}{36}$. Para que tal fração seja redutível, $3x+2y$ deve ser múltiplo de 2 ou de 3, o que ocorre se, e somente se, x é múltitplo de 2 ou y é múltiplo de 3. Mas x não pode ser múltiplo de 2, pois a fração $\frac{x}{12}$ é irredutível, da mesma forma que y não pode ser múltiplo de 3, pois é irredutível. Logo a fração $\frac{x}{12}+\frac{y}{18}$ será sempre irredutível.

19) (OPM Fase Final)

(a)

1	2	4	8	16
5	10	20	40	80
25	50	100	200	400
125	250	500	1000	2000
625	1250	2500	5000	10000

(b) Se Arnaldo começar com 10, Bernaldo só poderá escolher 1, ou as potências de 5 (5, 25, 125 e 625) ou as potências de 2 (2, 4, 8 e 16). Se essa escolha for 1, Arnaldo ganha direto, se for uma das potências de 2, Arnaldo escolhe 5, a menos que Bernaldo escolha 4, 8 ou 16, pois Arnaldo deverá, neste caso, escolher 25, 125 ou 625, respectivamente. Se Bernaldo, ao invés de potência de 2 escolher 5, Arnaldo escolhe 2 e ganha, mas se Bernaldo escolher 25, 125 ou 625, Arnaldo escolhe 4, 8 ou 16 respectivamente e também ganha.

(c) Se Arnaldo escolher outro número se não 10, Bernaldo ganha. Se Arnaldo escolher uma potência de 2, Bernaldo escolhe a potência de 5 correspondente. Se Arnaldo escolher um número que não é potência nem de 2 nem de 5, Bernaldo escolhe 10 e procede da mesma maneira que Arnaldo faria para ganhar (tudo explicado no item anterior, num tabuleiro simétrico).