Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Problemas de Teoria dos Números e Contagem - Aula 09

Após os conceitos de números inteiros que foram trabalhados até este ponto, como divisores, múltiplos e outros, estes podem ser utilizados em problemas de contagem. Perguntas como: quantos são os números inteiros que satisfazem tal condição, ou quantos divisores tal número possui, podem ser explorados utilizando ideias simples de contagem.

Nesta aula os princípios aditivo e multiplicativo serão bastante utilizados, lembrando que problemas de contagem possuem diversas soluções, sempre é bom tentar pensar uma resposta por outros caminhos.

Problema 1. (OBMEP 2^a Fase) Um número A de dois algarismos é um supernúmero se é possível encontrar dois números B e C, ambos também de dois algarismos, tais que:

- $A = B + C$
- soma dos algarismos de A = (soma dos algarismos de B) + (soma dos algarismos de C).

Por exemplo, 35 é um supernúmero. Duas maneiras diferentes de mostrar isto são $35 = 11 + 24$ e $35 = 21 + 14$, pois $3 + 5 = (1 + 1) + (2 + 4)$ e $3 + 5 = (2 + 1) + (1 + 4)$. A única maneira de mostrar que 21 é um supernúmero é $21 = 10 + 11$.

a) Mostre de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero.

b) De quantas maneiras diferentes é possível mostrar que 49 é um supernúmero?

c) Quantos supernúmeros existem?

Solução.

a) Duas maneiras de mostrar que 22 é um supernúmero são $22 = 10 + 12$ $(2 + 2 = 1 + 0 + 1 + 2)$ e $22 = 11 + 11$ $(2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1)$.

Três maneiras de mostrar que 25 é um supernúmero são $25 = 10 + 15$ $(2 + 5 = 1+0+1+5)$, $25 = 11+14$ $(2+5 = 1+1+1+4)$ e $25 = 12+13$ $(2+5 = 1+2+1+3)$.

b) A seguir estão todas as maneiras possíveis de escrever 49 como soma de dois algarismos cada (colocando sempre a menor parcela na esquerda):

$49 = 10 + 39$, $49 = 11 + 38$, $49 = 12 + 37$, $\cdots$, $49 = 24 + 25$

De 10 até 24 temos $24 - 10 + 1 = 15$, e qualquer uma dessas pode ser usada para mostrar que 49 é um supernúmero, por exemplo, $4 + 9 = 1 + 7 + 2 + 2$.

c) Como 10 é o menor número de dois algarismos, então $10 + 10 = 20$ é o menor número de dois algarismos que pode ser escrito como a soma de dois números de dois algarismos. Consideremos agora qualquer número x de dois algarismos, maior ou igual a 20, e vamos chamar de a seu algarismo das dezenas e b seu algarismo das unidades. Vamos agora pensar no número $x - 10$. Ele é pelo menos 10 (pois x é pelo menos 20), seu algarismo das dezenas é $a - 1$ e o das unidades é b, aqui fazemos a conta $ab - 10$ e de fato a dezena será $a - 1$ e a unidade b.

   Então a expressão $x = 10 + (x - 10)$ mostra que x é um supernúmero, pois $a + b = 1 + 0 + (a - 1) + b$.

   Um exemplo numérico para entender essa ideia. Pensamos em $x = 38$, então $38-10 = 28$, ou seja, $x - 10 = 28$. A expressão $x = 10 + (x - 10)$ fica $38 = 10 + 28$, que mostra que 38 é um supernúmero, pois, $3 + 8 = 1 + 0 + 2 + 8$. Logo, todos os números de 20 a 99 são supernúmeros, e no total são $99 - 20 + 1 = 80$.

Problema 2. (OBMEP 2^a Fase) Dois números naturais formam um *casal* quando eles têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, 225 e 774 são um casal, pois ambos têm três algarismos e $225 + 774 = 999$.

a) Qual é o número que forma um casal com o 2010?

b) Quantos são os casais formados por números de dois algarismos?

Casais especiais são casais em que os dois números têm os mesmos algarismos e, em cada número, os algarismos são distintos. Por exemplo, 36 e 63 formam um casal especial, mas 277 e 722 não.

c) Dê um exemplo de um casal especial com números de quatro algarismos.

d) Explique por que não existem casais especiais com números de três algarismos.

Solução.

a) O número que forma um casal com 2010 é 7989, pois ambos possuem quatro dígitos e sua soma é $2010 + 7989 = 9999$.

b) Existem noventa números com dois dígitos, a saber, os números de 10 a 99. Desses números, só não possuem par aqueles que começam com 9, ou seja, os dez números de 90 a 99. Logo, oitenta números com dois dígitos têm par para formar um casal, e portanto existem quarenta casais distintos com dois dígitos.

c) Damos a seguir três exemplos de casais especiais: $(2376, 7623)$, $(5814, 4185)$ e $(8901, 1098)$.

d) 1^a solução: Vamos supor que exista um casal especial de números com três algarismos. Sejam A o algarismo das centenas, B o algarismo das dezenas e C o algarismo das unidades de um dos números desse casal; esse número é então ABC, onde notamos que A não é igual a 0. Esses são também os algarismos do segundo número do casal, que pode então ser ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ou CBA. Temos então

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & C & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & B & A & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & B & C & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & C & A & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & C & B & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

as seis possibilidades listadas: A primeira possibilidade não pode ocorrer, pois $A + A = 9$ é impossível. De modo similar, eliminamos a segunda, a terceira e a última possibilidade. Na quarta possibilidade temos $B+C = 9 = A+C$ e segue que $A = B$, o que não pode acontecer, pois em um casal especial os algarismos são distintos. O mesmo argumento elimina a quinta possibilidade, e concluímos que não existem casais especiais com números de três algarismos.

2^a solução: Suponhamos que exista um casal especial com números de três algarismos e sejam A, B e C os algarismos desses números. Cada algarismo de um dos números somado com algum algarismo do segundo número tem 9 como resultado; assim devemos ter $A+A+B+B+C+C = 2(A+B+C) = 27$, o que não pode acontecer pois 27 é ímpar. Logo não existem casais especiais com números de três algarismos.

3^a solução: Suponhamos que exista um casal especial de números de três algarismos. Como 9 não é soma de dois pares ou dois ímpares e a soma dos integrantes do casal é 999 e, entre seus algarismos das centenas um é par e o outro é ímpar, e o mesmo vale para os algarismos das dezenas e das unidades. Logo o número de algarismos pares de um dos dois é igual ao número de algarismos ímpares do outro. Como os dois integrantes do casal têm os mesmos algarismos concluimos que em qualquer um deles o número de algarismos pares é igual ao número de algarismos ímpares, o que não pode acontecer pois eles possuem apenas três algarismos. Esse argumento mostra que não existem casais especiais com integrantes que tenham um número ímpar qualquer de algarismos.

1 Problemas

Problemas de Teoria dos Números e Contagem: Problemas Introdutórios

Problema 3. Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?

Problema 4. Linea e Lana brincam da seguinte maneira: a primeira a jogar pensa em um número de 10 a 99 e diz apenas a soma dos algarismos do número; a segunda tem então que adivinhar esse número. Qual é o maior número de tentativas erradas que a segunda pessoa pode fazer?

Problema 5. Um número natural A de três algarismos detona um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345, porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

Problema 6. Cláudia gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e, caso o produto tenha mais de um algarismo, ela os soma. Ela chama o resultado final de *transformado* do número escolhido. Por exemplo, o transformado de 187 é 11, pois $1 \times 8 \times 7 = 56$ e $5+6 = 11$; já o transformado de 23 é 6, pois $2 \times 3 = 6$.

a) Qual é o transformado de 79?

b) Quais são os números de dois algarismos cujo transformado é 3?

c) Quantos são os números de três algarismos cujo transformado é 0?

Problema 7. Jade escreveu todos os números de 3 algarismos em cartões amarelos, um por cartão e escreveu todos os números de 4 algarismos em cartões azuis, um por cartão. Os cartões são todos do mesmo tamanho.

a) Ao todo, quantos cartões foram utilizados? Lembre-se que, por exemplo, 037 é um número de dois algarismos, bem como 0853 é um número de três algarismos.

b) Todos os cartões são então colocados numa mesma urna e embaralhados. Depois Jade retira os cartões, um a um, sem olhar o que está pegando. Quantos cartões Jade deverá retirar para ter certeza de que há dois cartões azuis entre os retirados?

Problemas de Teoria dos Números e Contagem: Problemas Propostos

Problema 8. Quantos números inteiros maiores do que 2003^2 e menores do que 2004^2 são múltiplos de 100?

Problema 9. Qual é o maior número de algarismos que devem ser apagados do número de 1000 algarismos $20082008\cdots2008$, de modo que a soma dos algarismos restantes seja 2008?

Problema 10. Os números de 1 a 99 são escritos lado a lado: $123456789101112\cdots9899$. Então aplicamos a seguinte operação: apagamos os algarismos que aparecem nas posições pares, obtendo $13579012\cdots89$. Repetindo essa operação mais 4 vezes, quantos algarismos irão sobrar?

Problema 11. Carlinhos escreve números inteiros positivos diferentes e menores do que 1000 em várias bolas e coloca-as numa caixa, de modo que Mariazinha possa pegar ao acaso duas dessas bolas. Quantas bolas no máximo Carlinhos irá colocar na caixa se os números das duas bolas deverão ter um divisor comum maior do que 1?

Problema 12. Esmeralda, de olhos vendados, retira cartões de uma urna contendo inicialmente 100 cartões numerados de 1 a 100, cada um com um número diferente. Qual é o número mínimo de cartões que Esmeralda deve retirar para ter certeza de que o número do cartão seja um múltiplo de 4?

Problema 13. Quantos os números de dois algarismos têm a soma desses algarismos igual a um quadrado perfeito? Lembre-se que, por exemplo, 09 é um número de um algarismo.

Problema 14. Quantos números inteiros maiores que zero e menores que 100 possuem algum divisor cuja soma dos dígitos seja 5?

Problema 15. Dizemos que dois ou mais números são irmãos quando têm exatamente os mesmos fatores primos. Por exemplo, os números $10 = 2 \times 5$ e $20 = 2^2 \times 5$ são irmãos, pois têm 2 e 5 como seus únicos fatores primos. O número 60 tem quantos irmãos menores do que 1000?

Problema 16. Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1.
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números, por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Problema 17. Um hotel tem 15 andares com 25 quartos cada um. As chaves dos quartos são identificadas por um número de três ou quatro algarismos indicando o andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Por exemplo, a chave 106 é a do quarto número 06 do 1^o andar e a chave 1315 é a do quarto número 15 do 13^o andar.

a) Quantos são os quartos do 10^o andar para cima?

b) Quantas chaves têm número em que aparece o algarismo 1?

c) Dionísio não aceita ficar em um quarto em cuja chave aparece o algarismo 1 seguido de 1 ou de 3. Em quantos quartos do hotel ele pode se hospedar?

Problema 18. Dizemos que um número natural é teimoso se, ao ser elevado a qualquer expoente inteiro positivo, termina com o mesmo algarismo. Por exemplo, 10 é teimoso, pois 10^2, 10^3, $\cdots$ são números que também terminam em zero. Quantos números naturais teimosos de três algarismos existem?

Problema 19. Em uma face de cada um de três cartões foi escrito um número inteiro positivo. Em seguida, os cartões foram colocados lado a lado sobre uma mesa, com a face numerada para baixo. Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo sabem que:

- Os números escritos nos cartões são todos diferentes.
- A soma dos três números é 13.
- Os números crescem da esquerda para a direita.

a) Considerando as três condições, escreva todas as possibilidades de numeração dos cartões.

b) Agora é hora de descobrir os números que foram escritos nos cartões. Primeiramente, Arnaldo olha o número do primeiro cartão na esquerda e diz que não tem informações suficientes para descobrir os outros dois números sem levantar os outros cartões. Depois, Bernaldo levanta o último cartão na direita, olha o número e diz também que não consegue descobrir os dois números na esquerda, sem levantar todos os cartões. E o mesmo acontece com Cernaldo, que levanta o cartão do meio, olha seu número e afirma que não consegue descobrir os números nos outros dois cartões. Sabendo que todos ouvem o que os demais dizem, mas não vêem o cartão que o outro olhou, qual número está escrito no cartão do meio?

Problemas de Teoria dos Números e Contagem: Soluções dos Introdutórios

3) (OBM 1^a Fase) Em 600 números consecutivos, existem $600 \div 3 = 200$ números múltiplos de 3 e $600 \div 4 = 150$ números múltiplos de 4, mas veja que existem números que foram contados duas vezes, os números múltiplos de 3 e de 4, que são os números múltiplos de 12, e eles são $600 \div 12 = 50$. Portanto são $200 + 150 - 50 = 300$ páginas impressas.

4) (OBM 1^a Fase) Dentre os números de 10 a 99, a soma dos algarismos mais frequente é 9 ou 10, ambas aparecendo 9 vezes cada. Logo o maior número de tentativas erradas que a segunda pode fazer é $9 - 1 = 8$.

5) (OBM 1^a Fase) Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter X = 4, 5, 6, 7, 8 ou 9; Y = 2, 3, $\cdots$, 9 e Z = 5, 6, 7, 8 ou 9. Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja $6 \times 8 \times 5 = 240$.

6) (OBMEP 2^a Fase)

a) Primeiro multiplicamos os algarismos de 79, obtendo $7 \times 9 = 63$, e depois somamos os algarismos desse produto, obtendo $6 + 3 = 9$. Logo o transformado de 79 é 9.

b) A brincadeira de Cláudia tem duas etapas: a primeira, na qual ela multiplica os algarismos, e a segunda, na qual ela soma os algarismos do produto encontrado, no caso de esse produto ter mais de um algarismo. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na primeira etapa, esse número só pode ser 13 ou 31. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na segunda etapa, o resultado da primeira etapa deve ser um número de dois algarismos cuja soma seja 3, ou seja, deve ser 12, 21 ou 30. A lista abaixo mostra todos os números de dois algarismos cujo produto é um desses três números.

12 com 26, 62, 34 ou 43 21 com 37 ou 73 30 com 56 ou 65

Assim, os números 13, 31, 26, 62, 34, 43, 37, 73, 56 e 65 são os únicos números de dois dígitos cujo transformado é 3.

c) 1^a solução: Na segunda etapa da brincadeira temos uma soma de algarismos, que é sempre diferente de 0; portanto, 0 nunca será obtido como transformado de um número de três algarismos nessa etapa. Para se obter 0 como transformado de algum número de três algarismos na primeira etapa, esse número deve ter 0 como algarismo das unidades, das dezenas ou de ambas. Os números de três algarismos que tem 0 tanto nas unidades quanto nas dezenas são 100, 200, $\cdots$, 900, num total de 9. Os números que tem 0 apenas nas unidades são da forma $XY0$, onde X e Y representam algarismos de 1 a 9; há $9 \times 9 = 81$ números desse tipo, e o mesmo raciocínio mostra que há 81 números de três algarismos com 0 apenas no algarismo das dezenas. No total, há $9 + 81 + 81 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.

2^a solução: Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou em ambas. O algarismo das centenas pode ser qualquer algarismo de 1 a 9. Depois de escolhido esse algarismo, pode-se escolher os algarismos das dezenas e das unidades de 19 maneiras diferentes; por exemplo, 100, 101, 102, $\cdots$, 109, 110, 120, $\cdots$, 190 são as 19 possibilidades com o 1 na primeira posição. Logo o total procurado é $9 \times 19 = 171$.

3^a solução: Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou ambas. Há 90 números com 0 nas unidades e 90 com 0 nas dezenas, bem como 9 que tem 0 tanto nas dezenas quanto nas unidades. No total, há $90 + 90 - 9 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.

7) (OBM 2^a Fase)

   a) Há $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos, escritos em cartões amarelos, e $9999 - 1000 + 1 = 9000$ números de quatro algarismos, escritos em cartões azuis. Ao todo, foram utilizados $900 + 9000 = 9900$ cartões.

   b) Como existe a possibilidade de serem retirados todos os cartões amarelos antes de aparecer algum azul, para Jade ter certeza de que há dois cartões azuis entre os retirados ela deverá retirar $900 + 2 = 902$ cartões.

Problemas de Teoria dos Números e Contagem: Soluções dos Propostos

8) (OBM 2^a Fase) Perceba que 2003^2 é um número que termina em 9, mais precisamente $2003^2 = 4012009$, logo ele não é um múltiplo de 100, e 2004^2 é um número que termina em 16, mais precisamente $2003^2 = 4016016$, que também não é múltiplo de 100. Logo a quantidade de múltiplos de 100 entre os dois números pode ser obtida olhando a diferença entre esses números.

   $2004^2 - 2003^2 = 4016016 - 1012009 = 4007$

   Logo ao fazermos $4007 \div 100$ temos quociente 40 e resto 7, ou seja, são 40 múltiplos de 100 e um deslocamento de 7 unidades, insuficiente para atingir outro múltiplo de 100.

9) (OBM 1^a Fase) A estratégia para apagar o maior número de algarismos é eliminar a maior quantidade possível de algarismos de menor valor. Vamos começar pelos $1000 \div 2 = 500$ zeros que aparecem no número. Restam agora 250 algarismos 2 e 250 algarismos 8, cuja soma é $250 \times 2 + 250 \times 8 = 500 + 2000 = 2500$. Apagamos agora a maior quantidade de algarismos 2 e como $2500 - 2008 = 492$, podemos atingir nossa meta apagando $492 \div 2 = 246$ algarismos 2. Portanto o maior número de algarismos que devem ser apagados é $500 + 246 = 746$.

10) (OBM 2^a Fase) A quantidade inicial de algarismos é $9 + 2 \times 90 = 189$, dos quais 94 aparecem nas posições pares e 95 nas posições ímpares. Apagados os algarismos que aparecem nas posições pares, sobram 95 algarismos; desses, 47 estão nas posições pares e 48 nas posições ímpares. Repetindo a operação, restam 48 algarismos, sendo 24 algarismos em posições pares e 24 em posições ímpares. Na terceira aplicação da operação restam 12 algarismos e, na quarta, sobram 6 algarismos.

11) (OBM 2^a Fase) Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o MDC entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

12) (OBM 2^a Fase) De 1 a 100, existem 25 múltiplos de 4; logo, 75 cartões não contêm múltiplos de 4. No pior caso possível, Esmeralda tiraria todos esses cartões antes de sair algum cartão com múltiplo de 4. Assim, para ter certeza de que o número tirado seja múltiplo de 4, Esmeralda deve retirar todos eles e mais um, ou seja, 76 cartões.

13) (OBM 2^a Fase) A soma dos algarismos dos números de dois algarismos varia de 1 a 18. Dessas somas, as que são quadrados perfeitos são 1, 4, 9 e 16. Temos então:

   - Soma 1: número 10
   - Soma 4: números 13, 22, 31 e 40
   - Soma 9: números 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 e 90
   - Soma 16: números 79, 88 e 97

   Portanto, nas condições propostas, há 17 números.

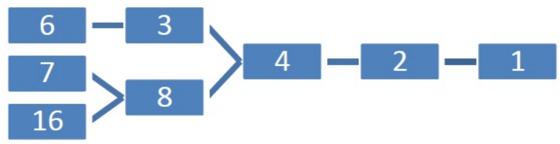
14) (OBM 2^a Fase) São os múltiplos de 5, que nesse intervalo são 19; os múltiplos de 14, que são 6 (pois o 70 já foi contado); os múltiplos de 23, que são 4; os múltiplos de 32, que são 3 e, finalmente, os múltiplos de 41, que são 2. Note que o único múltiplo de 50 no intervalo, que é o próprio 50, já foi contato nos múltiplos de 5. Portanto ao todo são $19 + 6 + 4 + 3 + 2 = 34$ números.

15) (OBM 2^a Fase) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ tem os fatores 2, 3 e 5, logo os irmãos de 60 são múltiplos de $2 \times 3 \times 5 = 30$. Veja que $1000 \div 30$ retorna quociente 33, logo são 33 múltiplos de 30 menores que 1000, então 60 tem no máximo 32 irmãos. Destes múltiplos, os que tem outros fatores além de 2, 3 e 5 são: 7×30, 11×30, 13×30, 14×30, 17×30, 19×30, 21×30, 22×30, 23×30, 26×30, 28×30, 29×30, 31×30 e 33×30. Logo 60 possui $32 - 14 = 18$ irmãos.

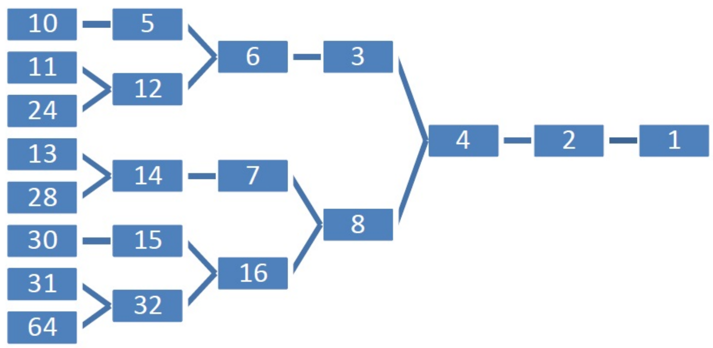
16) (OBMEP 2^a Fase)

   a) A sequência é: $37 \longrightarrow 38 \longrightarrow 19 \longrightarrow 20 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$.

   b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ e $8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$; elas são obtidas a partir de $4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ na esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ na esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ dá origem a sequência par $6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$; a sequência par $8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ dá origem a sequência ímpar $7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ e a sequência par $16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo 2 pares e 1 ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema a seguir.



c) 1^a solução: Repetindo o esquema do item anterior, temos: e assim temos 3 sequências



pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

2^a solução: Observamos que a sequência ímpar de comprimento cinco dá origem a 1 sequência par de comprimento seis; já as 2 sequências pares de comprimento cinco dão origem a 2 sequências pares de comprimento seis e 2 sequências ímpares de comprimento seis. Assim, temos 2 sequências ímpares de comprimento seis e $1+2=3$ sequências pares de comprimento seis, num total de $2+3=5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há 8 sequências de comprimento sete, sendo três ímpares e cinco pares.

Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$, o número de sequências pares é 2, 3, 5, 8, 13, $\cdots$ e o número total de sequências é 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$. Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, $\cdots$, conhecida como sequência de Fibonacci. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

comprimento	**5**	**6**	**7**	**...**	**15**	**16**
Ímpares	1	2	3	...	144	233
pares	2	$2+1=3$	$3+2=5$	...	233	$233+144=377$
total	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	...	$144+233=377$	$233+377=610$

d) 1^a solução: As 144 sequências ímpares de comprimento quinze dão origem a 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze dão origem a 233 sequências pares de comprimento dezesseis e

233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e $377 = 233 + 144$ sequências pares de comprimento dezesseis, num total de $233 + 377 = 610$ sequências.

2^a solução: A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é $1, 2, 3, 5, 8, \cdots,$ $144, 233, 377, 610, \cdots$. O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15^o (resp. 16^o) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp.16) é o 16^o (resp. 17^o) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17^o (resp. 18^o) termo, que é 377 (resp. 610).

17) (OBMEP 2^a Fase)

a) Do 10^o andar até o 15^o andar há 6 andares, cada um com 25 quartos. Logo o número de quartos do 10^o andar para cima é $6 \times 25 = 150$.

b) O número de uma chave é formado pelo número do andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Podemos dividir as chaves em quatro casos, como segue:

   (a) andar com 1, quarto sem 1
   (b) andar sem 1, quarto com 1
   (c) andar e quarto com 1
   (d) andar e quarto sem 1

   Observamos os andares cujos números têm o algarismo 1 são 1, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, num total de 7; segue que os andares sem 1 são em número de $15 - 7 = 8$. Os quartos com 1 são 01, 10, $11, \cdots$, 19 e 21, num total de 12; os quartos sem 1 são então em número de $25 - 12 = 13$. O princípio fundamental da contagem nos permite saber quantas chaves aparecem em cada um dos grupos:

   (a) andar com 1, quarto sem 1: $7 \times 13 = 91$.
   (b) andar sem 1, quarto com 1: $8 \times 12 = 96$.
   (c) andar e quarto com 1: $7 \times 12 = 84$.
   (d) andar e quarto sem 1: $8 \times 13 = 104$.

   Os três primeiros grupos consistem das chaves com 1, que são em número de $7 \times 13 + 8 \times 12 + 7 \times 12 = 271$. Podemos também proceder, observando que para obter o número de chaves com 1 basta retirar, do total de chaves, as chaves do grupo 4 acima. Como o número total de chaves é 15×25 , isso nos leva a conta $15 \times 25 - 8 \times 13 = 271$.

c) O número total de chaves é $15 \times 25 = 375$. Para obter o número de chaves procurado, primeiro eliminamos as chaves de quartos nos andares 11 e 13, que são em número de $2 \times 25 = 50$. Restam 13 andares a considerar; devemos eliminar também as chaves dos quartos 11 ou 13 desses andares, o que nos dá $13 \times 2 = 26$ chaves. Finalmente, devemos considerar as chaves do andar 1 e, neste andar, de quartos cujo dígito das dezenas seja também 1. Como já eliminamos os quartos 11 e 13 de todos os andares, os números possíveis para esses quartos são 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, ou seja, devemos ainda eliminar 8 chaves. Desse modo, o número de chaves em que não aparecem as sequências 11 ou 13 é $375 - 50 - 26 - 8 = 291$.

18) (OBM 2^a Fase) São teimosos apenas os números que terminam em 0,1, 5 e 6. A quantidade de números teimosos de 3 algarismos é $9 \times 10 \times 4 = 360$ (na casa das centenas podemos escrever qualquer algarismo de 1 a 9, na casa das dezenas podemos escrever qualquer algarismo de 0 a 9 e na casa das unidades podemos escrever um dos quatro algarismos acima).

19) (OBM 3^a Fase) Sejam x, y e z os números dos cartões. Temos $x + y + z = 13$ e vamos supor que $x < y < z$.

    a) Temos $1 + 2 + 10$, $1 + 3 + 9$, $1 + 4 + 8$, $1 + 5 + 7$, $2 + 3 + 8$, $2 + 4 + 7$, $2 + 5 + 6$ e $3 + 4 + 6$

    b) Quando Arnaldo olha, pode-se eliminar o $3 + 4 + 6$, pois ele saberia, já que é o único que começa com 3. Quando Bernaldo olha, pode-se eliminar o $1 + 2 + 10$, o $1+3+9$ e o $2+5+6$. O primeiro porque é o único que acaba com 10. O segundo com 9. E o último, já que não pode ser o $3+4+6$ graças a Arnaldo é o único que acaba com 6. Quando Cernaldo olha, pode-se eliminar o $1+5+7$ e o $2+3+8$. Já que o $2+5+6$ foi eliminado por Bernaldo, o $1+5+7$ é o único com 5 no meio. E já que Bernaldo também eliminou o $1+3+9$, o $2+3+8$ é o único com 3 no meio.

       Resposta: Assim sobraram apenas o $1 + 4 + 8$ e o $2 + 4 + 7$. Então o 4 está no cartão do meio.