Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

Prof. Bruno Holanda

Aula 1

Jogos e Brincadeiras I

1. Brincadeiras

Nesta primeira parte da aula resolveremos duas questões retiradas da Olimpíada Brasileira de Matemática. Nosso objetivo é demonstrar que alguns tipos de brincadeiras ajudam a desenvolver a capacidade de raciocínio lógico.

Problema 1. (OBM 2006) Esmeralda inventou uma brincadeira. Digitou alguns algarismos na primeira linha de uma folha. Depois, na segunda linha, fez a descrição dos algarismos digitados da seguinte maneira: ela apresentou as quantidades de cada um dos que apareceram, em ordem crescente de algarismo. Por exemplo, após digitar 21035662112, ela digitou 103132131526, pois em 21035662112 existe um algarismo 0, três algarismos 1, três algarismos 2, um algarismo 3, um algarismo 5 e dois algarismos 6.

a) Ela começou uma nova folha com 1. Fez, então, sua descrição, ou seja, digitou 11 na segunda linha. Depois, descreveu 11, ou seja, digitou 21 na terceira linha, e assim continuou. O que ela digitou na 10^a linha da folha?

b) Esmeralda gostou tanto de fazer isso que decidiu preencher várias folhas com essa brincadeira, começando com 01 na primeira linha da primeira folha. Quais são os dois primeiros algarismos da esquerda do que ela digitou na 2006^a linha?

Solução.

a) Para resolver a questão, basta escrevermos em ordem as listas obtidas por Esmeralda seguindo as regras do enunciado até obtermos a décima lista:
1
11
21
1112
3112
211213

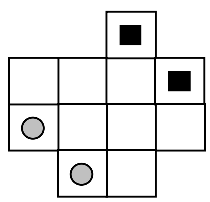
312213
212223
114213
31121314

b) Escrevamos os números das novas listas iniciais:
01
1011
1031
102113
10311213
Veja que todos os números da lista começam em 10. Isto ocorre pois nunca irá aparecer um outro 0 na sequência. Portanto, a resposta do problema é 10.

Problema 2. A partir do tabuleiro mostrado nas figuras abaixo e quatro peças, duas circulares cinzas e duas quadradas pretas, Esmeraldinho inventou o seguinte jogo:

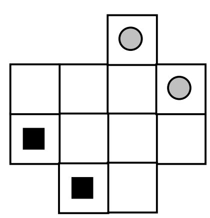
- Inicialmente, as peças são colocadas no tabuleiro como mostra a figura 1.

Figura 1

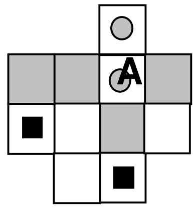


- A meta do jogo é, após um certo número de movimentos, trocar as peças de posição, chegando na situação mostrada na figura 2.

Figura 2

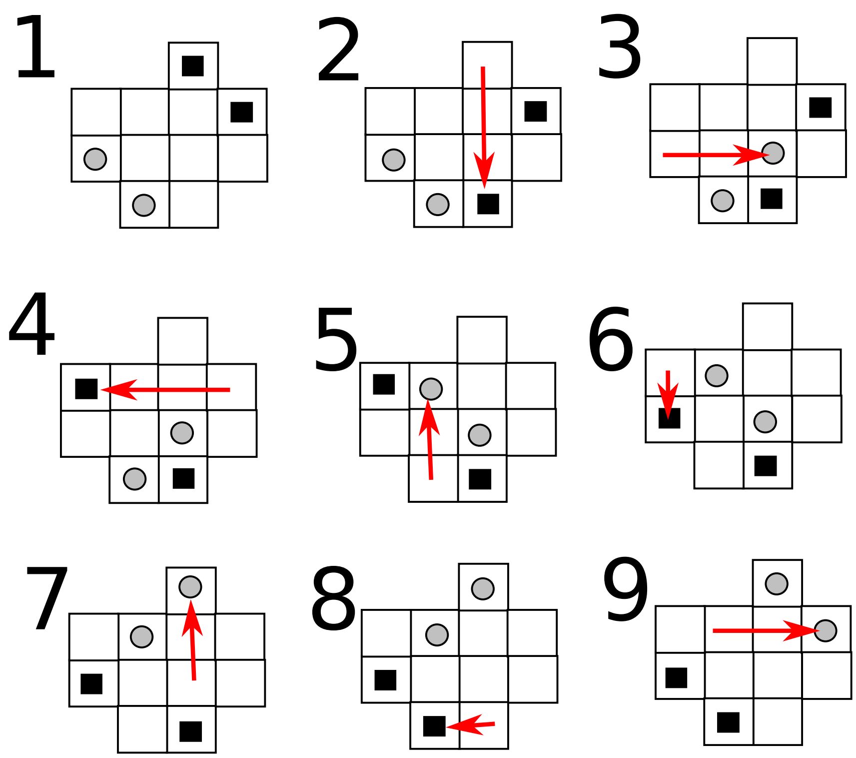


- Cada movimento consiste em mover uma das quatro peças uma ou mais casas acima, abaixo, à esquerda ou à direita; todavia, tal peça não pode pular nenhuma peça que, eventualmente, esteja no caminho, ou ocupar uma casa onde já existe uma peça. Por exemplo, a peça marcada com A só pode se mover para alguma das casas destacadas em cinza.
- Os movimentos dos círculos e dos quadrados são alternados. O jogo começa com um movimento de um dos quadrados.



Determine a menor quantidade total de movimentos necessários para terminar o jogo. Mostre, passo-a-passo, através de desenhos, como movimentar as peças com esta quantidade de movimentos e prove que não é possível terminar o jogo com menos movimentos.

Solução. Veja que não existem duas peças diferentes (um quadrado e um círculo) que estão na mesma linha ou coluna do tabuleiro. Isso significa que cada peça deve utilizar ao menos dois movimento para ir de sua posição original para a final. Portanto, devemos utilizar pelo menos oito movimentos. O exemplo a seguir nos garante que bastam oito movimentos:



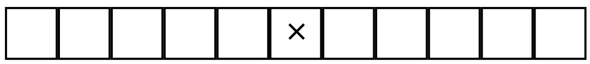
2. Jogos de Simetria

Quando falamos em jogos, pensamos em vários conhecidos como: xadrez, as damas e os jogos com baralho. Porém, não são desses jogos que abordaremos neste material. Imagine que exista algum tipo de jogo em que você pudesse ganhar sempre, independente de como seu adversário jogasse? *Seria uma boa, não?!* Pois esses jogos existem e são um dos assuntos mais abordados em provas de olimpíada. Nesta aula vamos mostrar vários destes jogos e uma das principais estratégias vencedoras: a *simetria*.

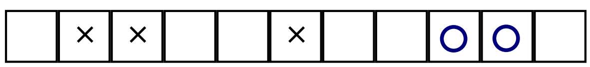
Problema 3. Pedro e Mônica jogam em um tabuleiro 1×11. Cada um, em sua vez, pode pintar um dos quadrados (que não foram pintados anteriormente), ou dois quadrados consecutivos (se ambos estiverem brancos). Quem não puder mais jogar perde. Sabe-se que Pedro será o primeiro a jogar. Quem pode sempre garantir a vitória?

Solução. Pedro sempre poderá ganhar se seguir a seguinte estratégia:

(i) Inicialmente, Pedro deve pintar o quadrado do meio.



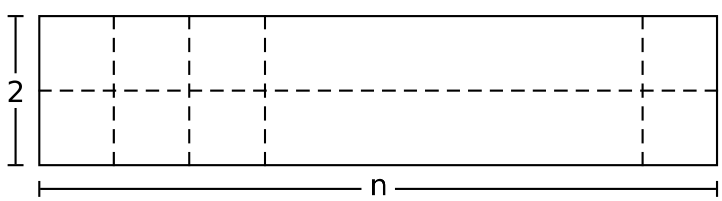
(ii) Agora, depois que Mônica fizer sua jogada, Pedro deve jogar sempre simetricamente em relação ao centro do tabuleiro (i.e. sempre deixando o tabuleiro simétrico). Por exemplo, se Mônica jogar nas casas 9 e 10, Pedro deve jogar nas casas 2 e 3.



(iii) Assim, Mônica nunca poderá ganhar, pois na sua jogada ela "quebra a simetria" e a configuração final do jogo todas as casas estarão pintadas, ou seja, a configuração é simétrica. □

O próximo exemplo é um dos problemas que apareceu na prova da OBM de 2004. Vamos apresentar uma solução diferente da solução proposta na Eureka! 22, usando simetria:

Problema 4. Arnaldo e Bernardo disputam um jogo em um tabuleiro $2 \times n$:



As peças do jogo são dominós 2×1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente. Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.

Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

a) $n = 2004$?
b) $n = 2005$?

Solução. Quando $n = 2005$ o primeiro jogador garante a vitória. Ele pode fazer isto colocando um dominó na vertical no meio do tabuleiro e, em seguida, jogar simetricamente ao segundo jogador. Quando $n = 2004$ o tabuleiro possui um número par de colunas. Desse modo, o segundo ganha jogando simetricamente ao primeiro jogador. $\square$

Como você deve ter visto, usar a simetria é realmente uma técnica muito eficiente. Porém, às vezes, usar apenas a simetria não é suficiente para resolver o problema. Observe o próximo exemplo retirado da olímpiada da Bielorússia de 2000.

Problema 5. Tom e Jerry jogam o seguinte jogo. Eles colocam alternadamente pinos idênticos em casas vazias de um tabuleiro 20×20 (um pino de cada vez). Tom é o primeiro a jogar. Vence quem, em sua jogada, formar um bloco de quatro pinos vizinhos. Dois pinos são vizinhos se estiverem em casas com um lado em comum. Determine quem possui a estratégia vencedora.

Solução. Jerry deve jogar simetricamente em relação ao centro do tabuleiro. Assim que Tom formar três um bloco de três pinos vizinhos, Jerry deve abandonar a estratégia simétrica e completar o bloco de quatro pinos vizinhos.

Problemas Propostos

Problema 6. Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 15 e outra com 16 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

Problema 7. Dois jogadores colocam alternadamente bispos (da mesma cor) em um tabuleiro 8×8, de forma que nenhum bispo ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

Problema 8. Dois jogadores colocam alternadamente reis (da mesma cor) em um tabuleiro 9×9, de forma que nenhum rei ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

Problema 9. São dados um tabuleiro de xadrez (8×8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas do tabuleiro. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada rodada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma das casas do tabuleiro, sendo proibido sobrepor os palitinhos.
Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum dos jogadores cometa erros, qual dos dois tem a estratégia vencedora?

Problema 10. São dados vinte pontos ao redor de um círculo. Cada jogador em sua vez pode ligar dois desses pontos se essa novo segmento não cortar os feitos anteriormente. Quem não puder mais traçar nenhum segmento perde.

Problema 11. (Rússia 1997) Os números $1, 2, 3, ..., 1000$ são escritos no quadro. Dois jogadores apagam alternadamente um dos números da lista até que só restem dois números. Se a soma desses números for divisível por 3, o primeiro jogador vence, caso contrário vence o segundo. Quem tem a estratégia vencedora?

Problema 12. Sobre uma mesa existem duas pilhas de moedas com 11 moedas cada. Em cada turno, um jogador pode retirar duas moedas de uma das pilhas ou retirar uma moeda de cada pilha. O jogador que não puder mais fazer movimentos perde.

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados dos livros:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience (Mathematical World, Vol. 7)**. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.

2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991 (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1)**. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

Outra fonte de problemas são as páginas da Olimpiada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`) e da Olimpiada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (`www.obmep.org.br`).

Dicas e Soluções

6. O jogador 1 deve retirar uma pedra da pilha com 16. Em seguida, deve jogar simetricamente em relação ao jogador 2.

7. Divida o tabuleiro em duas partes, cada uma formada por 4 linhas. O jogador 1 deve jogar então simetricamente.

8. O primeiro jogador deve colocar um rei no centro, e depois jogar simetricamente em relação ao centro do tabuleiro.

9. O segundo jogador vence se usar simetria em relação ao centro do tabuleiro. No momento em que o primeiro jogador formar uma configuração com três palitos sobre os lados de um mesmo quadrado, o segundo deve completar o quadrado.

10. O primeiro jogador deve ligar dois vértices opostos (digamos 1 e 11) e em seguida jogar simetricamente em relação a este primeiro segmento.

11. Observe que a soma de dois elementos opostos sempre é 1002, que é um múltiplo de 3.

12. Construa um tabuleiro 11×11, onde a casa (i, j) represente quantidade de pedras em cada pilha. Observe que o movimento do jogo original é equivalente ao movimento do cavalo no tabuleiro. Termine o problema descobrindo as posições vencedoras e perdedoras através de indução retroativa.