Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

Prof. Bruno Holanda

Aula 8

Configurações Mágicas

De maneira geral, podemos dizer que as configurações mágicas são tipos especiais de diagramas em que devemos colocar um conjunto de números obedecendo alguma regra ou padrão. Um dos exemplos mais famosos de configurações mágicas é o quadrado mágico, que consiste de um tabuleiro 3×3 no qual devemos colocar os números de 1 a 9 (sem repetir) de modo que a soma dos elementos escritos em cada linha, coluna o diagonal seja sempre o mesmo.

A ideia básica para construirmos um quadrafo mágico é perceber que a soma de todos os números será

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9 = 45,$$

e dessa forma, a soma dos elementos em cada linha deve ser $\frac{45}{3} = 15$. Para determinar a posição de cada um dos números, use as variáveis a,...,i para representar os valores de cada casa do tabuleiro da seguinte forma:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Somando os elementos presentes nas diagonais, na segunda linha e segunda diagonal, temos:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f + g + h + i}_{=45} + 3e = 4 \cdot 15 = 60$$

Resolvendo esta última equação, descobrimos que $e = 5$. Dessa forma, números que somam 10 devem ocupar casas opostas em relação à casa central do tabuleiro. Por exemplo, se a for 7, i deve ser 3. Continuaremos a análise focando no maior número do conjunto: o 9.

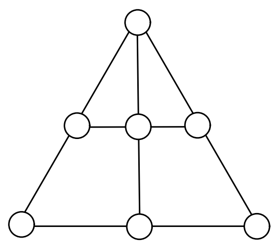
Suponha que $a = 9$. Neste caso, devemos ter $b + c = 6$ e $d + g = 6$. Lembre-se que a já descobrimos que a soma dos números em cada linha e cada coluna deve ser igual a 15. Por outro lado, não há como escolhermos dois pares de números no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ de forma que a soma dos elementos em cada par seja 6. Dessa forma, concluimos que $a \neq 9$. De modo análogo, nenhum dos valores c, g ou h pode ser 9, devido à simetria existente no quadrado. Dessa forma, 9 só pode ocupar uma das posições b, d, f ou h. Novamente pela simetria, podemos assumir que $h = 9$. E neste caso, $b = 1$.

Agora veja que $g + i$ deve ser igual a 6. Portanto, g e i são, em alguma ordem, 2 e 4. Sem perda de generalidade, faça $g = 2$ e $i = 4$. Neste caso, $a = 6$ e $c = 8$. Para finalizar, veja que devemos ter $d = 3$ e $f = 7$. Logo, um possível exemplo de quadrado mágico é:

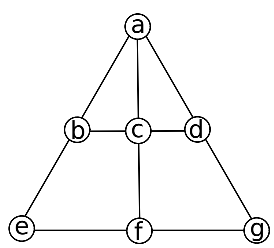
8	1	6
3	5	7
4	9	2

. $\square$

Problema 1. Mostre como distribuir os números de 1 a 7 de modo que a soma dos números em cada uma das linhas seja sempre o mesmo.



Solução. Sejam $a, b, ..., g$ os números que ocupam as casas do diagrama da seguinte maneira:



Note que $a, ..., g$ são uma permutação de $1, ..., 7$ e, portanto:

$$a + b + c + \cdots + g = 1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = 28$$

Seja x a soma dos elementos em cada uma das linhas. Somando os elementos das três linhas que partem de (a), temos

$$2a + (a + b + c + \cdots + g) = 3x$$

$$2a + 28 = 3x$$

Somando os elementos das duas linhas horizontais:

$$b + c + \cdots + g = 2x$$

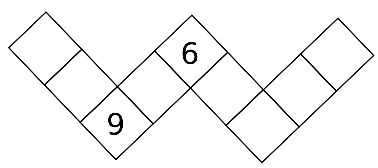
$$28 - a = 2x$$

Resolvendo o sistema com variáveis a e x encontramos que $a = 4$ e $x = 12$. Neste caso,

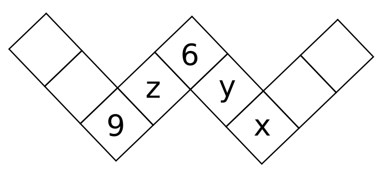
$$b + e = c + f = d + g = 8$$

Os únicos pares de números do conjunto $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ que somam oito são $(1, 7)$, $(2, 6)$ e $(3, 5)$. Dessa forma, assuma que $b = 1$. Portanto, devemos ter $e = 7$ e $c + d = 11$. Assim, concluímos que $c = 6$, $d = 5$, $f = 2$ e $g = 3$ é uma possível solução. $\square$

Problema 2. Mostre como escrever os números de 1 a 9, um por casa e sem repetições, de modo que a soma dos números em cada uma das quatro linhas seja a mesma. Já foram escritos os números 9 e 6. Colocar os demais números.



Solução. Seja S a soma dos três números escritos em cada linha. Defina x, y e z os números que ocupam as casas centrais da configuração da seguinte forma:



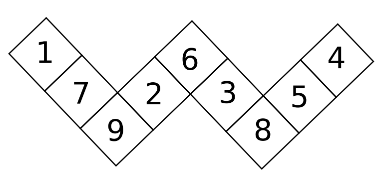
Se somarmos as quatro linhas, os números 9, 6 e x serão contados duas vezes, enquanto os demais números serão contados apenas uma vezes. Dessa forma,

$$4S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9 + (6 + 9 + x) = 60 + x.$$

Portanto, x deve ser um múltiplo de 4. E os únicos valores possíveis são 4 ou 8.

- Se $x = 4$, então $S = 16$. Neste caso, y deveria ser igual a 6. Impossível, pois nenhum número deve ser repetido.

- Se $x = 8$, então $S = 17$, $y = 3$ e $z = 2$. Restando os números $1, 4, 5, 7$ que podem ser distribuídos da seguinte maneira:



Finalizaremos os exercícios resolvidos com uma questão um pouco mais trabalhosa do que as demais.

Problema 3. (Olimpíada Rioplatense) Em cada casa de um tabuleiro 4×4 deve ser colocado um dos números de 1 a 16 sem repetir nenhum de modo que a soma dos número em cada uma das quatro linhas, quatro colunas e duas diagonais forme, em alguma ordem, um conjunto de 10 números inteiros consecutivos. Alguns números já foram colocados. Determine a posição dos demais.

4	5	7	
6		3	
11	12	9	
10			

Solução. Sejam $x, x+1, ..., x+9$ o dez número consecutivos mencionados no enunciado. Considere ainda os números a, b, c na tabela a seguir:

4	5	7	**a**
6	**b**	3	
11	12	9	
10			**c**

Sabemos que a soma de todos os números na tabela é

$$1 + 2 + 3 + \cdot + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136$$

Dessa forma, quando somamos os números de x a $x+9$ estamos somando cada uma das quatro linhas, quatro colunas e o números nas diagonais. Assim

$$x + (x+1) + \cdots + (x+9) = 2 \cdot 136 + 10 + 12 + 3 + 4 + 9 + a + b + c$$

$$10x + (1 + 2 + \cdots + 9) = 272 + 38 + (a + b + c)$$
$$10x + 45 = 310 + (a + b + c)$$
$$10x = 265 + (a + b + c).$$

Na última equação, temos do lado direito um número múltiplo de 10. Portanto, $a + b + c$ deve ser um número terminado em 5.

Observe que a, b, c pertencem ao conjunto $F = \{1, 2, 8, 13, 14, 15, 16\}$ formado pelos números que estão faltando ser colocados na tabela. Note ainda que os possíveis valores de $a + b + c$ são limitados:

$$11 = 1 + 2 + 8 \leq a + b + c \leq 14 + 15 + 16 = 45.$$

Dessa forma, $a + b + c$ só poderia assumir um dos seguintes valores: $15, 25, 35, 45$.

Por outro lado, não há três elementos em F cuja soma seja 15. Portanto, descartamos essa possibilidade. Testando os outros casos:

- Se $a + b + c = 25$, então $x = 29$ e $x + 9 = 38$.
- Se $a + b + c = 35$, então $x = 30$ e $x + 9 = 39$.
- Se $a + b + c = 45$, então $x = 31$ e $x + 9 = 40$.

Em todos os casos, devemos ter que a soma dos números na segunda diagonal deve ser menor que ou igual a 40. Logo,

$$10 + 12 + 3 + a \leq 40 \Rightarrow a \leq 15.$$

Por outro lado, se $a = 15$ a soma dos números na primeira linha será $4+5+7+15 = 31$ que é igual à soma dos elementos da primeira coluna. Assim, descartamos esta possibilidade. Mais ainda, a soma dos elementos da primeira linha deve ser maior que ou igual a 29. Logo,

$$4 + 5 + 7 + a \geq 29 \Rightarrow a \geq 13.$$

Dessa forma, só nos restam duas possibilidades ou $a = 13$ ou $a = 14$.

Se $a = 13$, a soma dos elementos da primeira linha será 29. Esse valor só pode ser considerado se $x = 29$. Portanto, $a + b + c = 25$ e assim $b + c = 12$. Consequentemente, a soma dos elementos da primeira diagonal será $4 + 9 + b + c = 25$: um valor que não pode ser válido. Concluindo, a deve ser igual a 14.

Sabendo que $a = 14$, devemos ter que $b+c = 11$ ou $b+c = 21$ ou $b+c = 31$. Como $b, c \in F$ e não há dois elementos em F cuja soma seja 11, descartamos a primeira possibilidade. Se $b + c = 31$, então a soma dos elementos da segunda diagonal será $4 + 9 + 31 = 44$, superando a cota de 40 achada em argumento anterior. Portanto, $b + c = 21$ e neste caso b e c são 13 e 8 em alguma ordem. Pois são os únicos números que somam 31 e que petencem a F. Além disso, também descobrimos que $x = 30$ e que os dez valores a serem considerados estão entre 30 e 39 (inclusive).

Agora veja a tabela com alguns valores já descobertos e outros a serem considerados nos próximos argumentos. Seja ainda $G = \{d, e, f, g\} = \{1, 2, 15, 16\}$ o conjunto dos demais números restantes.

4	5	7	14
6	**b**	3	**d**
11	12	9	**e**
10	**f**	**g**	**c**

Sabemos que a soma da primeira diagonal é 34 e que a soma da terceira linha não pode ser superior a 38 (pois 39 já é a soma dos números na segunda diagonal). Portanto,

$$11 + 12 + 9 + e \leq 38 \Rightarrow e \leq 6.$$

Como $e \in G$ e $e \neq 2$, pois caso contrário a soma dos elementos da terceira linha seria 34, concluimos que $e = 1$.

Na terceira coluna, observe que $7 + 3 + 9 + g \geq 30$, logo $g \geq 11$. Como $g \in G$, devemos ter que $g = 15$ ou $g = 16$. Se $g = 15$, a soma dos elementos da terceira linha será 34 (o mesmo da segunda diagonal). Portanto, $g = 16$. Refazendo a tabela:

4	5	7	14
6	**b**	3	**d**
11	12	9	1
10	**f**	16	**c**

Agora sabemos que $\{b, c\} = \{8, 13\}$ e $\{d, f\} = \{2, 15\}$. Veja ainda que não podemos ter $b = 13$ e $f = 15$, pois a soma da segunda coluna seria $13 + 12 + 15 + 5 = 45 > 39$. E também não podemos ter $b = 8$ e $d = 2$, pois neste caso, a soma da segunda linha seria $6 + 8 + 3 + 2 = 22 < 30$. Para finalizar, se $f = 2$ e $c = 13$ a soma dos números da quarta linha será igual a $10 + 2 + 16 + 13 = 41 > 39$. Portanto,

$$(b, c, d, f) = (8, 13, 15, 2).$$

Problemas Propostos

Problema 4. Mostre como escrever os números de 1 a 7, um por casa, de modo que a soma dos três números em cada uma das três linhas seja o mesmo. Já foram colocados o 3 e o 4. Mostre como colocar os demais.

		4
3		

Problema 5. As casas de um tabuleiro 4×4 devem ser numeradas de 1 a 16, como mostrado parcialmente no desenho, formando um Quadrado Mágico, ou seja, as soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais são iguais.

14	11	5	X
	8		
12		3	
			Y

a) Que números devem ser escritos no lugar de X e de Y?

b) Apresente o Quadrado Mágico completo.

Problema 6. Na tabela a seguir, escreva os números de 1 a 9 em cada coluna de modo que a soma dos números escritos nas 9 linhas seja a mesma (igual a Y).

			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
			Y
X	X	X	

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da página da Olimpiada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`). Outros livros que também podem servir como apoio são:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience (Mathematical World, Vol. 7)**. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.

2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991 (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1)**. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

Você poderá buscar outras questões nos bancos de questões e nas provas antigas da OBMEP, no site `www.obmep.org.br`.