POTI
Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Lista de Exercícios
Recorrências I

Nível 2 - Polo UFPR
Álgebra
Aula 4 (25/05/19)

1 Recorrências

Observe as seguintes sequências:

1. $1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ...;$
2. $a_n = n^2 + n + 2$; e
3. $a_n^3 = 99a_{n-1}^3$ com $a_1 = 1$.

Note que na terceira sequência temos que o cubo do n-ésimo termo é obtido ao multiplicar 99 pelo cubo do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, podemos obter um termo a partir do termo anterior. Chamamos de *recorrência* a toda sequência desse tipo, ou seja, sequências nas quais podemos obter o n-ésimo termo a partir de seus termos anteriores.

As sequências $a_n = 2 + a_{n-1}$ com $a_1 = 3$, e $b_n = b_{n-1} + nb_{n-2} - 3a_{n-3}$ com $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_3 = -1$ são exemplos de recorrências.

As recorrências que iremos estudar recebem nomes especiais, que são as *Progressões Aritméticas* é *Progressões Geométricas*. Vamos iniciar com as Progressões Aritméticas.

1.1 Progressões Aritméticas

As Progressões Aritméticas (ou P.A.) são sequências tais que a diferença entre um termo e seu termo imediatamente anterior é sempre a mesma. Como exemplo, podemos considerar a sequência dos números pares 2, 4, 6, 8, 10, ..., onde as diferenças $4-2$, $6-4$, $8-6$, $10-8$, ... são todas iguais a 2. Portanto, essa sequência é uma P.A. Temos também que a sequência dos números ímpares 1, 3, 5, 7, ... e a sequência 5, 1, -3, -7, ...também são Progressões Aritméticas com diferenças 2 e -4 respectivamente. Então, se os números a, b, c, são termos consecutivos de uma P.A. temos que $b - a = c - b$, ou seja,

$$2b = a + c \tag{1}$$

Seja a_1, a_2, a_3, a_4, ... uma P.A. Então, $a_n - a_{n-1} = d$ qualquer que seja o valor de n com $n > 1$. A esse número d damos o nome de *razão* da P.A. Logo, na P.A. dos números pares 2, 4, 6, 8, ..., a razão é $d = 2$, e na sequência 5, 1, -3, -7, ... a razão é $d = -4$.

Como em uma P.A. temos $a_n - a_{n-1} = d$, ou seja, $a_n = a_{n-a} + d$, podemos encontrar uma relação na qual podemos calcular o n-ésimo termo da P.A. a partir do termo anterior. Mais ainda, como

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + d \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\
a_{n-2} &= a_{n-3} + d \\
&\vdots \\
a_4 &= a_3 + d \\
a_3 &= a_2 + d \\
a_2 &= a_1 + d
\end{aligned}$$

e somando essas equações, obtemos:

$$a_n + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_{n-2}} + ... + \cancel{a_4} + \cancel{a_3} + \cancel{a_2} = \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_{n-2}} + \cancel{a_{n-3}} + ... + \cancel{a_3} + \cancel{a_2} + a_1 + (n-1)d,$$

ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)d$, e essa fórmula é chamada de *termo geral* de uma P.A. Com o termo geral podemos calcular o n-ésimo e o m-ésimo termo de uma P.A., sendo

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ e } a_m = a_1 + (m-1)d.$$

Então,

$$\begin{aligned}
a_n - a_m &= [a_1 + (n-1)d] - [a_1 + (n-1)d] \\
a_n - a_m &= [a_1 + nd - d] - [a_1 + md - d] \\
a_n - a_m &= a_1 + nd - d - a_1 - md + d \\
a_n - a_m &= (n-m)d \\
a_n &= a_m + (n-m)d,
\end{aligned}$$

ou seja, também podemos calcular o termo a_n a partir do termo a_m.

Como exemplo, considere a P.A. 2, 5, 8, 11, ..., cuja razão é 3. Note que o quinto termo dessa P.A. é $11 + 3 = 14$. Usando o termo geral, temos $a_5 = 2 + (5-1)3 = 14$, que é o resultado esperado. Calculando o 50° termo, temos $a_{50} = 2 + (50-1)3 = 2 + 147 = 149$. Podemos também calcular a_{50} em função do a_5 usando a fórmula $a_n = a_m + (n-m)d$ com $n = 50$, $m = 5$ e $d = 3$, obtendo $a_{50} = a_5 + (50-5)3 = 14 + 135 = 149$. Como um segundo exemplo, dada uma P.A. tal que $a_{97} = 21$ e $a_{101} = 23$, determine a razão d. Como sabemos os valores de a_{97} e a_{101}, vamos utilizar a fórmula $a_n = a_m + (n-m)d$, com $n = 101$, e $m = 97$. Então $23 = 21 + (101-97)d$, ou seja, $2 = 4d$, e portanto, $d = \frac{1}{2}$.

Vamos agora calcular a soma dos termos de uma P.A. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma P.A., ou seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. Podemos também reescrevê-la de trás para frente, obtendo as seguintes equações:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & ... & + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n \\
S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & ... & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1
\end{array}$$

e somando as equações, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n). \quad (2)$$

Pelo termo geral, temos que

$$a_2 + a_{n-1} = [a_1 + d] + [a_1 + ((n-1)-1)d] = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n.$$

Da mesma forma obtemos que $a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$, $a_4 + a_{n-3} = a_1 + a_n$, e assim sucessivamente. Então, na equação (2), temos:

$$\begin{gathered}
2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\
2S_n = (a_1 + a_n)n \\
S_n = \tfrac{(a_1 + a_n)n}{2}.
\end{gathered}$$

Como exemplo, considere a sequência $-4, -1, 2, 5, 8, 11, ...$, cuja razão é $d = 3$. Fazendo a soma dos 6 primeiros termos, temos $S_6 = (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8 + 11 = 21$. Usando a fórmula, temos

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)6}{2} = \frac{((-4) + 11)\cancel{6}}{\cancel{2}} = 7 \cdot 3 = 21,$$

que é o resultado esperado. Caso quiséssemos calcular a soma dos primeiros 1000 termos, teríamos que calcular antes o termo a_{1000}, que é $a_{1000} = a_1 + (1000 - 1)3 = (-4) + 2997 = 2993$. Logo,

$$S_{1000} = \frac{(a_1 + a_{1000})1000}{2} = ((-4) + 2993)500 = 1494500.$$

Vejamos dois exemplos de olimpíadas:

Exemplo 1: (EUA) Os quatro primeiros termos de uma P.A. são a, x, b, $2x$. Determine o valor da razão $\frac{a}{b}$.

Resolução: Pela equação (1) temos que $2x = a + b$, pois a, x, b é uma P.A. Então, temos que $x = \frac{a+b}{2}$. Analogamente, temos que $2b = x + 2x$, ou seja, $2b = 3x$, pois x, b, $2x$ é P.A. Substituindo $x = \frac{a+b}{2}$ na equação $2b = 3x$, obtemos

$$2b = 3 \cdot \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 4b = 3a + 3b \Leftrightarrow b = 3a \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{a}{b}.$$

Exemplo 2: Se numa P.A. a soma dos m primeiros termos é igual à soma dos n primeiros termos, $n \neq m$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.

Resolução: Queremos mostrar que $S_{m+n} = 0$. Pela fórmula da soma dos termos de uma P.A. temos que $S_{m+n} = \frac{(a_1 + a_{m+n})(m+n)}{2}$, ou seja, queremos mostrar que $\frac{(a_1 + a_{m+n})(m+n)}{2} = 0$. Como $n + m \neq 0$. Pela hipótese temos que:

$$\begin{aligned} S_m &= S_n \\ \frac{(a_1 + a_m)m}{2} &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ (a_1 + a_m)m &= (a_1 + a_n)n, \end{aligned}$$

e como $a_m = a_1 + (m - 1)d$ e $a_n = a_1 + (n - 1)d$, temos que

$$\begin{aligned} (a_1 + a_m)m &= (a_1 + a_n)n \\ (a_1 + [a_1 + (m-1)d])m &= (a_1 + [a_1 + (n-1)d])n \\ (2a_1 + (m-1)d)m &= (2a_1 + (n-1)d)n \\ 2ma_1 + (m^2 - m)d &= 2na_1 + (n^2 - n)d \\ 2ma_1 + (m^2 - m)d - 2na_1 - (n^2 - n)d &= 0 \\ 2a_1(m-n) + ((m^2 - n^2) - (m-n))d &= 0 \\ 2a_1(m-n) + ((m-n)(m+n) - (m-n))d &= 0 \\ 2a_1(m-n) + (m-n)(m+n-1)d &= 0 \\ (m-n)(2a_1 + (m+n-1)d) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

e como $m - n \neq 0$ pois $m \neq n$, temos pela equação (3) que $2a_1 + (m + n - 1)d = 0$, e então,

$$\begin{aligned} 2a_1 + (m+n-1)d &= 0 \\ a_1 + [a_1 + (m+n-1)d] &= 0 \\ a_1 + a_{m+n} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, desde que $a_1 + a_{m+n} = 0$, temos que $S_{m+n} = \dfrac{(a_1 + a_{m+n})(m+n)}{2} = \dfrac{0 \cdot (m+n)}{2} = 0$, como queríamos demonstrar.

1.2 Progressões Geométricas

Vimos que em uma P.A. a diferença entre um termo e o termo anterior é iqual a uma mesma constante, ou seja, $a_n - a_{n-1} = d$. Na P.G. ocorrerá algo semelhante: a divisão entre um termo e o termo anterior é igual a uma mesma constante, ou seja, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Logo, $a_n = a_{n-1} \cdot q$. Então, se a, b, c é uma P.G., temos que $b^2 = ac$, pois

$$ac = a(bq) = a(qb) = (aq)b = bb = b^2.$$

A sequência 1, 2, 4, 8, 16, ... é uma P.G., pois $2 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = ...$, e também temos que $2^2 = 1 \cdot 4$, $4^2 = 2 \cdot 8$, $8^2 = 4 \cdot 16$, e assim por diante. O valor $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ é chamado de *razão* da P.G.

Seja a_1, a_2, a_3, ... uma P.G. Então, como $a_n = a_{n-1}q$, podemos encontrar o termo a partir de a_1 procedendo da sequinte maneira:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}q \\ a_{n-1} &= a_{n-2}q \\ a_{n-2} &= a_{n-3}q \\ &\vdots \\ a_4 &= a_3q \\ a_3 &= a_2q \\ a_2 &= a_1q. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$a_n \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \cancel{a_{n-2}} \cdot ... \cdot \cancel{a_4} \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_2} = \cancel{a_{n-1}} \cdot \cancel{a_{n-2}} \cdot \cancel{a_{n-3}} \cdot ... \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_2} \cdot a_1 \cdot q^{n-1},$$

ou seja, $a_n = a_1q^{n-1}$, que é a fórmula do termo geral da P.G.

Podemos também encontrar uma fórmula para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.G. da seguinte maneira: seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ a soma dos n primeiros termos de uma P.G. Então, multiplicando a equação pela razão q obtemos:

$$\begin{aligned} S_nq &= a_1q + a_2q + a + 3q + ... + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq \\ S_nq &= a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Calculando $S_nq - S_n$, obtemos:

$$S_nq - S_n = [a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}] - [a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n]$$
$$S_n(q-1) = a_{n+1} - a_1$$
$$S_n(q-1) = a_1q^{n+1} - a_1$$
$$S_n(q-1) = a_1(q^{n+1} - 1),$$

e para $q \neq 1$, temos que $S_n = a_1 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Note que para o caso $q = 1$ a P.G. se reduz à uma P.A. de razão 0, pois, pelo termo geral da P.G. temos que $a_n = a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$ para todo n, ou seja, a P.G. de termos a_1, a_2, a_3 e razão $q = 1$ seria constante. Logo, como uma P.G. de razão $q = 1$ é uma P.A. de razão 0, calculamos a soma dos termos dessa P.G. usando a fórmula da soma dos termos de uma P.A.

Usando o termo geral de uma P.G. podemos encontrar uma fórmula para o produto dos n primeiros termos de uma P.G. Seja P_n o produto dos n primeiros termos de uma P.G. Então,

$$
\begin{aligned}
P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\
P_n &= (a_1 \cdot 1) \cdot (a_1 q) \cdot (a_1 q^2) \cdot (a_1 q^3) \cdot \ldots \cdot (a_1 q^{n-2}) \cdot (a_1 q^{n-1}) \\
P_n &= a_1^n \cdot (q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-2} \cdot q^{n-1}) \\
P_n &= a_1^n q^{0+1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)} \\
P_n &= a_1^n q^{\frac{(0+(n-1))n}{2}} \\
P_n &= a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Elevando essa fórmula ao quadrado encontramos a seguinte fórmula alternativa:

$$
\begin{aligned}
(P_n)^2 &= \left(a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2 \\
P_n^2 &= (a_1^n)^2 \left(q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2 \\
P_n^2 &= (a_1^n a_1^n) q^{n(n-1)} \\
P_n^2 &= a_1^n a_1^n (q^{n-1})^n \\
P_n^2 &= a_1^n (a_1 q^{n-1})^n \\
P_n^2 &= a_1^n a_n^n \\
P_n^2 &= (a_1 a_n)^n.
\end{aligned}
$$

Considere a P.G. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ..., de razão 2. Pelo termo geral temos que o sexto termo é $a_6 = \frac{1}{4} \cdot 2^{6-1} = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8$. Pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. temos que $S_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{6+1}-1}{2-1} = \frac{127}{4}$, e pela fórmula alternativa do produto, temos que $P_6^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right)^6 =$ $= 2^6 = 64$, e portanto, $P_6 = 8$.

Exemplo 3: Suponha que x, y, z estejam em P.G. de razão r e $x \neq y$. Se x, $2y$, $3z$ estão em P.A., determine o valor de r.

Resolução: Como x, y, z estão em P.G. de razão r, então $y = xr$ e $z = yr = xr^2$, e como $y \neq x$ então $r \neq 1$, $r \neq 1$ e $x \neq 0$ (pois nesses casos temos $x = y$). Como x, $2y$, $3z$ estão em P.A. então $4y = 2(2y) = x + 3z$. Substituindo $y = xr$ e $z = xr^2$ na última equação temos:

$$4xr = x + 3xr^2 \Rightarrow 4r = 1 + 3r^2 \Rightarrow 0 = 3r^2 - 4r + 1.$$

Daí,

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow r = \frac{4 \pm 2}{6}.$$

Logo temos duas possibilidades para r:

i. $r = \dfrac{4+2}{6} = 1$, mas já vimos que $r \neq 1$; e

ii. $r = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$, que é a solução procurada.

Observação: Para resolver o exemplo anterior utilizamos a *Fórmula de Bháskara*, que diz que as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Exemplo 4: Se (a, b, c) formam, nesta ordem, uma P.A. e uma P.G. simultaneamente, mostre que $a = b = c$.

Resolução: Como (a, b, c) é P.A., temos que $2b = a + c$, e como (a, b, c) é também P.G., temos que $b^2 = ac$. Então, elevando ambos os membros de $2b = a + c$ ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
(2b)^2 &= (a+c)^2 \\
4b^2 &= a^2 + 2ac + c^2 \\
4ac &= a^2 + 2ac + c^2 \\
0 &= a^2 - 2ac + c^2 \\
0 &= (a-c)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $a - c = 0$, ou seja $a = c$. Substituindo $a = c$ na equação $2b = a + c$, obtemos $2b = a + a$. Daí, $2b = 2a$, e então, $b = a$. Portanto, $a = b = c$.

2 Questões Propostas

Problema 2.1. *(IME) Determine a relação que deve existir entre os números m, n, p, q para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos de uma mesma progressão aritmética não-constante:* $a_m + a_n = a_p + a_q$.

Problema 2.2. *Encontre o valor de* $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{98}$ *se* $a_1, a_2, a_3, ...$ *é uma P.A. de razão 1 e* $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{98} = 137$.

Problema 2.3. *Um jardineiro tem que regar* 60 *roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando* 1m *uma da outra. Ele enche seu regador, a* 15m *da primeira roseira, e, a cada viagem, rega* 3 *roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?*

Problema 2.4. *Observe a disposição, abaixo, da sequência dos números naturais ímpares:*
1a linha 1
2a linha 3, 5
3a linha 7, 9, 11
4a linha 13, 15, 17, 19
5a linha 21, 23, 25, 27, 29
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Determine o quarto termo da vigésima linha.

Problema 2.5. *Numa P.A., tem-se* $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$ *sendo* S_m *e* S_n *as somas dos m primeiros termos e dos primeiros n termos, respectivamente, com* $m \neq n$. *Prove que a razão da P.A. é o dobro do primeiro termo.*

Problema 2.6. *(OCM) Mostre que* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética.*

Problema 2.7. *Numa P.A., temos* $a_p = q$ *e* $a_q = p$*, com* $p \neq q$*. Determine* a_1 *e* a_{p+q}.

Problema 2.8. *(EUA) Em uma P.A., a soma dos* 50 *primeiros termos é* 200 *e a soma dos* 50 *próximos é* 2700*. Determine a razão e o primeiro termo dessa sequência.*

Problema 2.9. *(EUA) A soma dos* n *primeiros termos de uma P.A. é* 153 *e a razão é* 2*. Se o primeiro termo é um inteiro e* $n > 1$*, determine o número de valores possíveis de* n.

Problema 2.10. *(EUA) Os quatro primeiros termos de uma progressão aritmética são* p, 9, $3p-q$ *e* $3p+q$*. Qual é o* 2010° *termo dessa sequência?*

Problema 2.11. *(OCM) Determine a soma dos* n *primeiros termos da sequência:*

$$1, (1+2), (1+2+2^2), (1+2+2^2+2^3), \ldots, (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{k-1}).$$

Problema 2.12. *Mostre que não existe P.G. de três termos distintos tal que, ao somarmos um mesmo número real não-nulo a todos os seus termos, a nova sequência seja também uma P.G.*

Problema 2.13. *Sejam* a, b *e* c *números reais não-nulos, com* $a \neq c$*, tais que* $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$*. Prove que* a, b *e* c *formam uma P.G.*

Problema 2.14. *(EUA) O* 5° *e o* 8° *termos de uma progressão geométrica de números reais são* $7!$ *e* $8!$*, respectivamente. Qual é o* 1° *termo?*

3 Dicas

Problema 2.1. (i.) Use o termo geral da P.A. (ii.) Como a P.A. é não-constante, a razão é diferente de zero.
Problema 2.2. Use a fórmula $a_n = a_m + (n-m)d$ para escrever um termo ímpar em função do termo par seguinte.
Problema 2.3. (i.) Faça um desenho esquemático para facilitar a visualização. (ii.) Note que na primeira viagem o jardineiro anda 15m da torneira até a primeira roseira, rega a primeira roseira, anda mais 1m para regar a segunda roseira, e mais 1m para regar a terceira roseira, e enfim, retorna para a torneira.
Problema 2.4. (i.) Note que todos os números são do tipo $2k-1$ para $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$,..., nesta ordem. (ii.) Note que a quantidade de termos em cada linha define uma P.A. (iii.) Descubra quantos elementos tem até a linha 19.
Problema 2.5. Use o termo geral de uma P.A.
Problema 2.6. Use a equação (1) e eleve ambos os membros ao quadrado.
Problema 2.7. Use o termo geral de uma P.A.
Problema 2.8. Use a fórmula $a_n = a_m + (n-m)d$ para escrever os termos da forma a_{50+k} como $a_{50+k} = a_k + ((50+k)-k)d = a_k + 50d$ (por exemplo, $a_{55} = a_5 + (55-5)d = a_5 + 50d$), ou use a fórmula da soma.
Problema 2.9. (i.) Use o termo geral na fórmula da soma. (ii.) Determine o número de divisores de 153.
Problema 2.10. Use a equação (1) duas vezes.
Problema 2.11. (i.) Reescreva os termos da sequência usando a soma dos termos de uma P.G. (ii.) Ao somar os termos da sequência (já reescritos), reorganize de forma conveniente para usar a soma de P.G. novamente.
Problema 2.12. (i.) Use que, se x, y, z é P.G. então $b^2 = ac$. (ii.) Use o Exemplo 4.
Problema 2.13. (i.) Multiplique ambos os membros da igualdade por $c(c^2+b^2)$. (ii.) Fatore de forma conveniente.
Problema 2.14. (i.) Use o termo geral da P.G. (ii.) Calcule $\dfrac{a_8}{a_5}$.

4 Respostas

Problema 2.1. $m + n = p + q$.
Problema 2.2. 93.
Problema 2.3. 1820.
Problema 2.4. 387.
Problema 2.7. $a_1 = q + p - 1$, $a_{p+q} = 0$.
Problema 2.8. $r = 1$ e $a_1 = -20,5$.
Problema 2.9. 5.
Problema 2.10. 8041.
Problema 2.11. $2^{n+1} - n - 2$.
Problema 2.14. 315.