POTI — Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Nota de aula (Álgebra)
Recorrências II

Nível 2 - Polo UFPR
Bruno Pilatti e
Gabriel Alves
Aula 5 (08/06/19)

1 Recorrências II

Considere a sequência definida por

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$a_{n+1} = a_n + 3$$

Para entender melhor como ela funciona, podemos atribuir valores para n na relação acima. Deste modo os primeiros termos da sequência serão:

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$a_2 = a_1 + 3 = \sqrt{2} + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3 = (\sqrt{2} + 3) + 3 = \sqrt{2} + 6 = \sqrt{2} + \underbrace{2}\cdot 3$$
$$a_4 = a_3 + 3 = (\sqrt{2} + 6) + 3 = \sqrt{2} + 9 = \sqrt{2} + \underbrace{3}\cdot 3$$
$$a_5 = a_4 + 3 = (\sqrt{2} + 9) + 3 = \sqrt{2} + 12 = \sqrt{2} + \underbrace{4}\cdot 3$$
$$\vdots$$

Pelo padrão observado, podemos concluir que a sequência terá a forma (para qualquer $n > 1$): $a_{n+1} = \sqrt{2} + n \cdot 3$. Ou seja, para obter um elemento qualquer da sequência, agora só precisamos saber a posição dele (valor de n) e o valor do primeiro elemento. Lembre-se que relações como esta são chamadas de *recorrências*. Agora é a sua vez!
Exercício: Ache o termo geral da seguinte sequência (ou seja, para que ele só dependa do primeiro termo):

$$a_1 = x$$
$$a_{n+1} = a_n + 2$$

1.1 Recorrências Lineares de Segunda ordem

Nosso objetivo agora é trabalhar com sequências cuja definição é dada por dois termos. Vejamos um **exemplo**: Considere a sequência

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

Vamos achar o termo geral desta sequência. Para isto, vamos *multiplicar telescópicamente* várias delas. Para simplificar as contas, sabendo que $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, podemos subtrair a_{n-1} dos dois lados e teremos $a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$. Logo:

$$a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2(a_{n-2} - a_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2)$$

$$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$$

obtendo então, $a_n - a_{n-1} = 2^{n-2}(a_2 - a_1) = 2^{n-2}(3-1) = 2^{n-2} \cdot 2 = 2^{n-1}$. Com esta última equação, diminuímos o número de elementos a serem descobertos. Agora iremos realizar a *soma telescópica* com os elementos restantes:

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$a_3 - a_2 = 2^2$$

$$a_2 - a_1 = 2^1 = 2$$

e concluímos que $a_n - a_1 = 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}$. Os elementos desta última expressão formam uma P.G de razão $q = 2$, ou seja, pela fórmula da soma de P.G vista na última aula, temos que $a_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$, portanto $\boxed{a_n = 2^n - 1}$.

Com o último exemplo, podemos perceber que recorrências de ordem 2 são bem trabalhosas. Porém, podemos facilitar os cálculos se utilizarmos a *equação característica* da recorrência. Vamos ver do que se trata com mais detalhes na próxima seção.

1.2 Equação característica de uma recorrência

Considere a recorrência linear de ordem 2 genérica $\boxed{a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}}$.

Para encontrar o termo geral, primeiro acharemos a *equação característica* da recorrência. Mas como achar essa equação? Basta analisar como a recorrência é definida e, então, a equação característica será uma equação do segundo grau repetindo os coeficientes da recorrência, ou seja, $x^2 = px + q$, subtraindo os termos da parte direita da equação obtemos: $x^2 - px - q = 0$.

Esta será a equação caraterística da recorrência apresentada anteriormente. Vamos fazer alguns exemplos para entender como usar a equação e para nos convencer de que realmente funciona (o por quê desta equação está explicado no fim desta nota de aula, por se tratar de uma *demonstração*, ou seja uma prova formal matemática de sua validade, fica como curiosidade se você quiser se aprofundar no assunto).

Exemplo: Considere a recorrência já estudada anteriormente:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3$$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

Vamos usar a equação característica e comparar com os resultados já obtidos.

A equação característica desta recorrência é $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.
Vamos precisar das raízes da equação acima, como se trata de uma equação do segundo grau, vamos utilizar a fórmula de Bháskara, as soluções serão: $x = \dfrac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)}$ e $x = \dfrac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)}$, ou seja,

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} \qquad \text{ou}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{3+1}{2}$ ou $x = \dfrac{3-1}{2}$, logo $\boxed{x = 2}$ ou $\boxed{x = 1}$.

Sabendo quais são as raízes, o termo geral da sequência será dado por, $a_n = A \cdot (2)^n + B \cdot (1)^n$. Agora só nos resta descobrir quem são A e B. Mas isso não será difícil, pois já sabemos quanto vale a_1 e a_2. Substituindo então os valores de a_1 e a_2 obtemos as seguintes relações:

$$a_1 = A \cdot (2)^1 + B \cdot (1)^1 \;\;\Rightarrow\;\; 1 = 2A + B$$

$$a_2 = A \cdot (2)^2 + B \cdot (1)^2 \;\;\Rightarrow\;\; 3 = 4A + B$$

A partir destas duas expressões podemos achar os valores de A e B através de um sistema simples de equações, com efeito:

$$\begin{cases} 2A + B = 1 \\ 4A + B = 3 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos: $2A = 2 \Rightarrow A = 1$ e levando esse valor para a primeira equação, temos $2 \cdot (1) + B = 1 \Rightarrow B = 1 - 2 \Rightarrow B = -1$. Logo $(A, B) = (1, -1)$.

Nosso trabalho está terminado, basta substituir os valores encontrados de A e B no termo geral da recorrência, obtendo assim: $a_n = A \cdot (2)^n + B \cdot (1)^n \Rightarrow a_n = 1 \cdot (2)^n + (-1) \cdot (1)^n$

$$\Rightarrow a_n = 2^n - 1^n = 2^n - 1$$

Que é exatamente a mesma coisa que encontramos usando o primeiro método.

Observação: O que acabamos de fazer vale para qualquer recorrência linear de ordem 2. Deste modo, se tivermos uma recorrência do tipo $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$, podemos seguir o seguinte roteiro para achar seu termo geral:

- Consideramos a equação característica, que terá a forma: $x^2 = px + q$ ou $x^2 - px - q = 0$ (é a forma que geralmente usamos).
- Com a equação característica em mãos, achamos as raízes dela (digamos λ_1 e λ_2). Portanto o termo geral da recorrência será dado por $a_n = A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n$, com A e B números a serem descobertos.
- Descobrimos os valores de A e B. Para isso, como a recorrência é de ordem 2 (ou seja, depende de dois termos), usamos os valores já conhecidos desses termos e resolvemos um sistema simples de equações.

- Finalmente, temos tudo o que precisamos. O termo geral da recorrência será $a_n = A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n$ (onde os valores de A e B foram descobertos no item anterior).

Nas contas que fizemos anteriormente, estamos assumindo que as raízes da equação característica são diferentes. Se as raízes forem iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) haverá uma pequena diferença no termo geral, este será dado por $\boxed{a_n = A \cdot (\lambda)^n + B \cdot n \cdot (\lambda)^n}$.

Nesta aula trabalharemos com sequência deste tipo e algumas já estudadas anteriormente. Para ganhar intuição, substitua valores para n nas sequências que estudar, para descobrir o valor de alguns elementos (lembre-se que n se trata da posição do elemento na sequência).

2 Treino e Revisão

Abaixo se encontram algumas questões para treinar conceitos utilizados nesta aula. Faça-as se ainda não estiver confortável com os problemas propostos.

Problema 2.1. *Considere a sequência de termos* $(1, 3, 9, 27, 81, 243, ...)$. *Determine qual é o termo na décima posição e depois calcule a soma dos 10 primeiros termos da sequência.*

Problema 2.2. *Seja a sequência* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$. *Determine a soma dos 6 primeiros termos.*

Problema 2.3. *Qual o valor do produto* $\frac{8}{4} \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{16}{12} \cdot ... \cdot \frac{4n+4}{4n} \cdot ... \cdot \frac{2004}{2000} \cdot \frac{2008}{2004}$ *?*

3 Questões Propostas

Problema 3.1. *Ache o termo geral da sequência dada por:* $a_{n+1} = a_n + r$, *onde* r *é um número real (*a_1 *pode ser qualquer coisa).*

Problema 3.2. *Resolva a recorrência* $a_1 = 4$, $a_2 = 20$ *e, para* $n \geq 3$ $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

Problema 3.3. *Resolva a recorrência* $a_1 = 8$, $a_2 = 96$ *e, para* $n \geq 3$ $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$

Problema 3.4. *Determine o termo geral da sequência definida pela recorrência:* $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ *e* $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$

Problema 3.5. *Considere* n *quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:*

Seja a_n = *{número de maneiras de colorir os quadrados de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes}. Encontre uma relação de recorrência para* a_n *se cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou azul. Justifique.*

Problema 3.6. *(OPM) Uma escada tem* n *degraus. Para subi-la, em cada passo, pode-se subir um ou dois degraus de cada vez. De quantos modos diferentes pode-se subir a escada?*

Problema 3.7. *Uma sequência de números* a_k *é definida por* $a_0 = 0$ *e* $a_{k+1} = 3a_k + 1$, $k \geq 0$. *Prove que* a_{10} *é divisível por* 11.

4 Dicas

Problema 3.2. Tente substituir valores de n na recorrência e então achar um padrão e resolver usando produto/soma telescópica. Você pode usar diretamente a equação característica, mas recomendamos que faça pelo primeiro método e depois compare resultados. Preste atenção se as raízes da equação característica são iguais ou diferentes.
Problemas: 3.3. e 3.4 Mesmo raciocínio do Problema 3.2.
Problema 3.5. Para a_1 só temos um quadrado (ele pode ser vermelho ou azul), portanto $a_1 = 2$, para a_2, temos dois quadrados, então podemos fazer o esquema:

1º quadrado	2º quadrado
vermelho	azul
azul	azul ou vermelho

ou seja, se o primeiro for vermelho, o segundo só pode ser azul. Concluímos que $a_2 = 3$. Siga este raciocínio e tente achar um termo geral para um a_n qualquer.
Problema 3.6. Raciocínio parecido com o Problema 3.5
Problema 3.7. Tente provar que o termo geral da recorrência é $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ e use o fato de que $3^5 - 1 = 242 = 11 \cdot 22$.

5 Respostas

Problema 3.1. $a_n = a_1 + (n-1)r$
Problema 3.2. $a_n = -2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n$
Problema 3.4. $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$
Problema 3.5. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 3)$
Problema 3.6. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

6 Demonstração do termo geral da recorrência linear de ordem 2 usando equação característica.

Vamos dividir em dois teoremas:
Teorema 1: Considere a recorrência linear de ordem 2: $a_n = p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}$, com equação característica $x^2 = px + q \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0$, onde as raízes são diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Então o termo geral da recorrência será dado por $a_n = A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n$, com A e B números a serem descobertos.
Demonstração: Para provar que o resultado acima é verdadeiro, primeiro note que do fato que λ_1 e λ_2 são raízes da equação característica seguem as duas igualdades abaixo:

$$\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q = 0 \quad (i)$$

$$\lambda_2^2 - p\lambda_2 - q = 0 \quad (ii)$$

Vamos pegar o termo geral da recorrência e escrever de maneira mais conveniente:

$$a_n - p \cdot a_{n-1} - q \cdot a_{n-2} = 0 \quad (1)$$

Veja que nesta última expressão só subtraímos os membros da direita para igualar à 0, então ela equivavalente à expressão inicial.
Agora iremos tomar $u_n = A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n$ e considerar a expressão:

$$u_n - p \cdot u_{n-1} - q \cdot u_{n-2} \quad (2)$$

Note que esta expressão é bem parecida com a expressão (1) da recorrência, nosso objetivo é provar que ela é verdadeira e para isso, vamos mostrar que ela é igual à zero. Desta forma teremos que u_n é solução de (1).
Substituindo o valor considerado de u_n em (2):

$$\Big[A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n\Big] - p\Big[\cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-1} + B \cdot (\lambda_2)^{n-1}\Big] - q\Big[\cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-2} + B \cdot (\lambda_2)^{n-2}\Big]$$

$$A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n - p \cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-1} - p \cdot B \cdot (\lambda_2)^{n-1} - q \cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-2} - q \cdot B \cdot (\lambda_2)^{n-2}$$

Vamos agrupar os termos da equação:

$$\big(A \cdot (\lambda_1)^n - p \cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-1} - q \cdot A \cdot (\lambda_1)^{n-2}\big) + \big(B \cdot (\lambda_2)^n - p \cdot B \cdot (\lambda_2)^{n-1} - q \cdot B \cdot (\lambda_2)^{n-2}\big)$$

Colocando $A \cdot (\lambda_1)^{n-2}$ em evidência na primeira parte e $B \cdot (\lambda_2)^{n-2}$ na segunda, obtemos:

$$A(\lambda_1)^{n-2} \cdot (\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q) + B \cdot (\lambda_2)^{n-2}(\lambda_2^2 - p\lambda_2 - q)$$

Usando (i) e (ii), a última expressão se simplifica:

$$A(\lambda_1)^{n-2} \cdot 0 + B(\lambda_2)^{n-2} \cdot 0 = 0$$

Logo, chegamos onde queríamos, ou seja, substituímos o valor de u_n na recorrência (1) e chegamos à zero. Isto termina a demonstração do primeiro teorema.

Teorema 2 Considere a recorrência linear de ordem 2: $a_n = p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}$, com equação característica $x^2 = px + q \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0$, onde as raízes são iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Então o termo geral da recorrência será dado por $a_n = A \cdot (\lambda)^n + B \cdot n \cdot (\lambda)^n$, com A e B números a serem descobertos.

Observação: Não iremos demonstrar este segundo teorema, mas fica como exercício. Tente usar as ideias da demonstração do primeiro teorema.