Estudante: ______________________________ Álgebra

Colégio: ______________________________

Simulado 7 - Nível 2 - Equações e Sistemas

i) Preencha o cabeçalho acima com atenção.

ii) Cada questão tem apenas uma letra correta.

iii) Preencha o gabarito ao lado com as respostas.

iv) Cada problema vale 2 pontos.

v) Não é permitido qualquer tipo de consulta.

Gabarito

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e

Problema 1. Na subtração abaixo cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?

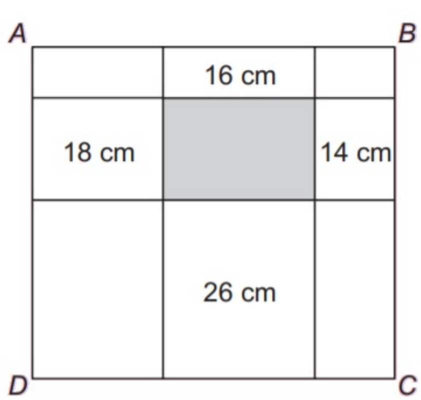
$$\begin{array}{r} A\ B\ A \\ -\quad C\ A \\ \hline A\ B \end{array}$$

a) 2 b) 4 c) 5 d) 7 e) 9

Problema 2. Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Problema 3. O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



a) 15 cm b) 19 cm c) 20 cm d) 22 cm e) 24 cm

Problema 4. Os inteiros $0 < x < y < z < w < t$ são tais que $w = z(x+y)$ e $t = w(y+z)$. Sendo $w = 9$, então t é igual a

a) 45 b) 54 c) 63 d) 72 e) 81

Problema 5. Observe que

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2.$$

Qual é o menor valor possível da soma $x + y$, com x e y inteiros positivos, tais que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

a) 1445 b) 795 c) 425 d) 289 e) 250

Respostas e Soluções.

Problema 1. Na subtração abaixo cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?

$$\begin{array}{r} A\ B\ A \\ -\quad C\ A \\ \hline A\ B \end{array}$$

a) 2 b) 4 c) 5 d) 7 e) 9

Solução para o Problema 1. (OBMEP)

Uma solução:
Observando a coluna das unidades temos $A - A = 0$ e não precisa puxar 10 das dezenas. Portanto, $B = 0$. Nas dezenas, temos $0 - C$ implicando que precisa vir 10 das centenas deixando $A - 1$ nas centenas do número de cima e $10 - C = A$ no resultado das dezenas. Mas $A - 1 = 0$ já que o resultado tem apenas dois algarismos. Assim, $A = 1$ e $10 - C = 1$ implicando $C = 9$.

Uma solução:
Outra forma de resolver é escrever $ABA - CA = AB \Leftrightarrow (100A + 10B + A) - (10C + A) = 10A + B \Leftrightarrow 90A + 10B - 10C = B$. Dessa forma, B é múltiplo de 10 e só pode ser zero. Restando $90A + 10 \cdot 0 - 10C = 0 \Leftrightarrow 9A - C = 0$. Como são algarismos só podem ser $A = 1$ e $C = 9$.

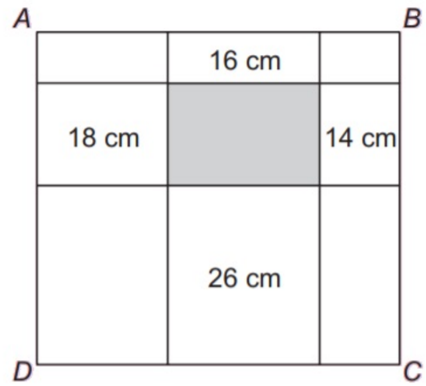
Problema 2. Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Solução para o Problema 2. (OBMEP)

Seja x o número obtido a partir do outro número apagando o dígito das unidades. Então o outro número é $10x + d$ onde d é o dígito das unidades que poderia ser apagado. Dessa forma, $x + 10x + d = 1357 \Leftrightarrow 11x + d = 1357$. Fazendo a divisão de 1357 por 11 obtemos $1357 = 11 \cdot 123 + 4$. Logo $11x + d = 11 \cdot 123 + 4 \Leftrightarrow 11(x - 123) = 4 - d$. Então $4 - d$ é um múltiplo de 11 e está entre $4 - 9 = -5$ e $4 - 0 = 4$. O único valor possível é zero. Temos $x = 123$ e $d = 4$. De fato, veja que $1234 + 123 = 1357$ satisfazendo as condições do enunciado.

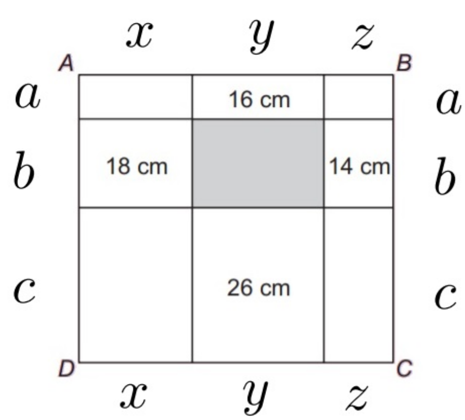
Problema 3. O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



a) 15 cm b) 19 cm c) 20 cm d) 22 cm e) 24 cm

Solução para o Problema 3. **(OBMEP)**

Considere os seguintes comprimentos descritos na figura



Usando o retângulo de perímetro 16 temos $2a+2y=16 \Leftrightarrow a+y=8$. Da mesma forma, $b+x=9$, $c+y=13$ e $b+z=7$. Somando todas as equações $(a+y)+(b+x)+(c+y)+(b+z)=8+9+13+7 \Leftrightarrow a+2b+c+x+2y+z=37$.
Além disso, usando o retângulo maior temos $a+b+c+x+y+z=27$.
A diferença entre as duas equações nos fornece $b+y=37-27=10$. O perímetro do retângulo sombreado é $2b+2y=2\cdot 10=20$ cm.

Problema 4. Os inteiros $0<x<y<z<w<t$ são tais que $w=z(x+y)$ e $t=w(y+z)$. Sendo $w=9$, então t é igual a

a) 45 b) 54 c) 63 d) 72 e) 81

Solução para o Problema 4. **(OBM)**

Se $w=9$ então $z(x+y)=9$. Veja que z e $x+y$ são maiores que 1 então $z=3$ e $x+y=3$. A única forma de somar dois inteiros positivos diferentes para obter 3 é $1+2$. Logo $x=1$ e $y=2$. Assim, $t=w(y+z)=9(2+3)=45$.

Problema 5. Observe que

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2.$$

Qual é o menor valor possível da soma $x + y$, com x e y inteiros positivos, tais que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

a) 1445 b) 795 c) 425 d) 289 e) 250

Solução para o Problema 5. (OBM)

Das equações fornecidas

$$y^2 - x^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 85^2 = 5^2 \cdot 17^2$$

Como x e y são inteiros positivos podemos afirmar que $y + x$ é inteiro positivo e usando o produto $y - x$ também é.
Então $y - x < y + x$ são divisores positivos de 85^2 com produto 85^2.
O número 85^2 possui 9 divisores positivos e temos 4 possibilidades para $y + x$

$$y + x = 5^2 \cdot 17^2 = 7225, 5 \cdot 17^2 = 1445, 5^2 \cdot 17 = 425, 17^2 = 289$$

que nos dão as 4 possibilidades para $y - x$, respectivamente,

$$y - x = 1, 5, 17, 5^2 = 25$$

Como são todos ímpares, todas essas possibilidades fornecem $y = \dfrac{(y + x) + (y - x)}{2}$ e $x = \dfrac{(y + x) - (y - x)}{2}$ inteiros positivos.
Concluímos que o menor valor possível de $y + x$ é 289.