

Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 1

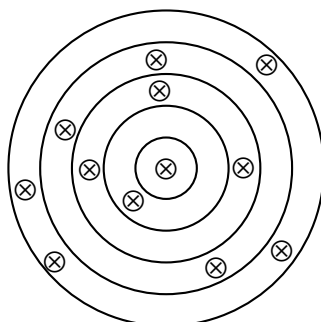
Lógica

Nos últimos anos, a participação brasileira em competições internacionais de matemática vem melhorado significativamente. E uma das consequências do sucesso de nossos alunos é o crescimento da demanda de interessados em aprender mais sobre o que é a olimpíada e que tipo de problemas são abordados em suas competições.

O grande diferencial de problemas de olimpíada de matemática para os problemas usuais, são seu alto nível de exigência do uso raciocínio lógico. Portanto, em muitos casos, a matemática aparece como uma ferramenta para desenvolver a argumentação de ideias abstratas.

Este é o primeiro de dois artigos escritos com o objetivo de apresentar tais problemas, mesmo sem desenvolver uma teoria matemática propriamente dita. Vamos nos focar diretamente nas **ideias**.

Problema 1. Quatro garotos jogam tiro ao alvo. Cada um deles atirou três vezes. No alvo abaixo, pode-se ver os lugares atingidos. A pontuação é 6 para o centro e diminui um ponto para cada nível mais distante.



Se os quatro garotos empataram, determine:

(a) a pontuação total de cada jogador.

Representamos com um $\otimes$ quando não foi possível continuar a lista sem repetir nenhum dígito. Assim, o modo correto de se escrever os algarismo é: 784913526.

Em alguns casos é necessário o uso de variáveis para resolver um problema. Isto acontece pois existem informações não especificadas no enunciado, e o uso de letras se mostra uma forma inteligente e fácil de trabalhar com valores desconhecidos. A seguir vamos resolver um problema que apareceu em uma olimpíada russa de 1995.

Problema 3. (Rússia 1995) Um trem deixa Moscou às x horas e y minutos, chegando em Saratov às y horas e z minutos. O tempo da viagem foi de z horas e x minutos. Ache todos os possíveis valores para x .

Solução. Das condições do problema, temos que:

$$\begin{aligned}(60y + z) - (60x + y) &= 60z + x \\ \Rightarrow 60(y - x - z) &= x + y - z.\end{aligned}$$

Com isso, podemos garantir que $x + y - z$ é um múltiplo de 60. Por outro lado, como $0 \leq x, y, z \leq 23$, o único valor possível para $x + y - z$ é 0. Ou seja, $x + y = z$. Além disso, na equação inicial temos que $60(y - x - z) = 0$. Daí, $y = x + z$. Logo, o único valor de x que garante essas igualdades é $x = 0$.

É importante perceber que no exemplo anterior que apenas o uso de letras não seria o suficiente para resolver o problema. O fundamental para resolver as equações acima era o significado das letras: números inteiros entre 0 e 60. Sem esta restrição o problema apresentaria infinitas soluções. Então fica a dica: nunca se **esqueça do significado das variáveis que estiver usando**, se são dígitos, números inteiros, racionais ou seja qual for a propriedade. Lembre-se que esta propriedade terá papel importante na solução do problema.

Organizar as informações também é útil na maioria dos problemas, como veremos no exemplo a seguir.

Problema 4. Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém 7 caixas verdes. Se ele possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui no total?

Solução. Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13 - x$	$7x - y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja x e que o número de caixas azuis cheias seja y . Portanto, temos $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é $(13 - x) + (7x - y) + 7y = 145$. Assim, podemos concluir que $x + y = 22$. Como o número total de caixas é $13 + 7(x + y)$, a resposta correta será $13 + 7 \times 22 = 167$.

Problemas Propostos

Problema 5. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Problema 6. Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

Problema 7. É possível cortar um tabuleiro 39×55 em vários retângulos 5×11 ?

Problema 8. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Problema 9. Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que ele ganha 5 pontos ao acertar cada problema corretamente e perde 3 pontos caso não resolva o problema. No final, o aluno tinha 8 pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

Problema 10. (Leningrado 1987) Na ilha de Anchúria existem quatro tipos de notas: 1\$, 10\$, 100\$ e 1000\$. Podemos obter 1\$ milhão com exatamente 500.000 notas?

Problema 11. Você tem uma lista de números reais, cuja soma é 40. Se você trocar todo número x da lista por $1 - x$, a soma dos novos números será 20. Agora, se você trocar todo número x por $1 + x$, qual será o valor da soma?

Problema 12. (Eslovênia 1992) Complete a tabela abaixo de modo que:

i. A soma de quaisquer três vizinhos seja a mesma.

ii. A soma total dos números seja 171.

			15				13					
--	--	--	----	--	--	--	----	--	--	--	--	--

Problema 13. Trabalhando juntos Alvo e Ivo, pintam uma casa em três dias; Ivo e Eva pintam a mesma casa em quatro dias; Alvo e Eva em seis dias. Se os três trabalharem juntos, quantos em quantos dias pintarão a casa?

Problema 14. (Rioplatense 1997) Em cada casa de um tabuleiro 4×4 é colocado um número secreto. Sabe-se que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é 1. Com essa informação é possível determinar a soma dos números escritos nos quatro cantos? E a soma dos quatro números escritos no centro? Se for, quais são essas somas?

Dicas e Soluções

6. Construa uma tabela, tente usar apenas uma variável!
7. Não. Demonstre que não é possível cobrir um dos lados do tabuleiro.
10. Sejam x , y , z e w as quantidades de notas. Monte um sistema com duas equações e use o fato de 500.000 não ser múltiplo de 9.
13. Use o fato de Alvo e Ivo pintarem um terço da casa em um dia.
14. Separe o tabuleiro em três regiões. Não se preocupe com os números, mas com a soma dos números nestas regiões espertas.