Aula 3 : Somatórios & PIF

Somatório:

Somatório é um operador matemático que nos permite representar facilmente somas de um grande número de parcelas. É representado pela letra maiúscula do alfabeto grego sigma ($\sum$).

Consideremos a soma 1 + 4 + 9 + 16 + ... + 100. Podemos observar que cada parcela é o quadrado de um número natural iniciando pelo número 1. Podemos representar pela forma i^2 , neste caso com i variando de 1 até 10. Assim esta soma pode ser abreviadamente representada por $\sum_{i=1}^{10} i^2$, onde se lê, somatório de i^2 com i variando de 1 até 10.

Generalizando: Seja $\{a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n\}$ um conjunto de $n - p$ + 1 números reais, o símbolo $\sum_{i=p}^{n} a_i$ representa a sua soma, isto é, $\sum_{i=p}^{n} a_i$ = $a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + + a_{n-1} + a_n$, onde:

- A variável p é o índice do somatório que designa um valor inicial, chamado limite inferior.
- A variável n é o índice do somatório que designa um valor final, chamado limite superior.
- A variável i percorre os valores inteiros desde p até alcançar o valor superior n.

Exemplo:

$$\sum_{x=1}^{4} (x^2 - x) = (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) = 0 + 2 + 6 + 12 = 20.$$

Número de parcelas de um somatório:

Se $\sum_{i=p}^{n} a_i$ = $a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$, então $\sum_{i=p}^{n} a_i$ tem $(n - p + 1)$ parcelas.

Propriedades de um somatório:

a) O somatório de uma constante "k", cujo valor é independente da posição "i":

$$\sum_{i=p}^{n} k = k + k + k + \ldots + k = (n - p + 1) * k.$$

b) Somatório do produto por uma constate "k":

$$\sum_{i=p}^{n} k * a_i = k * a_p + k * a_{p+1} + k * a_{p+2} + \ldots + k * a_n = k * (a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_n) = k * \sum_{i=p}^{n} a_i .$$

c) Somatório de uma soma algébrica:

$$\sum_{i=p}^{n} (a_i \pm b_i) = (a_p \pm b_p) + (a_{p+1} \pm b_{p+1}) + (a_{p+2} \pm b_{p+2}) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$

$$(a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots a_n) \pm (b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_n) = \sum_{i=p}^{n} a_i \pm \sum_{i=p}^{n} b_i .$$

d) Separação do último termo:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = (a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{n-1}) + a_n = \sum_{i=p}^{n-1} a_i + a_n .$$

e) Separação do primeiro termo:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i \quad = \quad a_p + \text{¿} \quad (a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n) \quad = \quad a_p + \sum_{i=p+1}^{n} a_i \quad .$$

f) Propriedade Telescópica:

$$\sum_{i=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+3} - a_{p+2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \quad =>$$

Agrupando de forma diferente os termos temos:

$$\sum_{i=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = -a_p + (a_{p+1} - a_{p+1}) + (a_{p+2} - a_{p+2}) + (a_{p+3} - a_{p+3}) + \ldots + (a_n - a_n) + a_{n+1} = a_{n+1} - a_p \quad =>$$

$$\sum_{i=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) \quad = \quad a_{n+1} - a_p \quad .$$

Aplicação: Prove que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)*n}{2}$.

Usando a propriedade da soma telescópica, temos:

$$\sum_{i=0}^{n} ((i+1)^2 - i^2) \quad = \quad (n+1)^2 - 0 \quad = \quad (n+1)^2$$, mas $(i+1)^2 - i^2 = 2*i+1$, então:

$$\sum_{i=0}^{n} ((i+1)^2 - i^2) = \sum_{i=0}^{n} 2*i+1 = 2*\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = 2*\left(0 + \sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \quad =>$$

$$(n+1)^2 = 2*\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \quad <=> \quad 2*\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)*(n) \quad =>$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)*n}{2} \quad . \blacksquare$$

Somatórios Duplos:

Muito utilizado em tabelas de duplas entradas (exemplo: escolaridade x renda familiar; idade x nota, etc.)

Notação: x_{ij} é um elemento que pertence a ***i***-ésima linha e ***j***-ésima coluna da tabela abaixo:

i \ *j*	1	2	3	...	K
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	X_{1k}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	X_{2k}
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	...	X_{3k}
.	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
L	X_{L1}	X_{L2}	X_{L3}	...	X_{Lk}

¿

$a\,x$

¿

$$¿11+x_{12}+\ldots+x_{1k}+x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{Lk}=\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{k}x_{ij}$$

¿

b

¿

$$\sum_{j=3}^{L}\sum_{i=3}^{k}x_{ij}^{2}=x_{33}^{2}+x_{34}^{2}+\ldots+x_{3k}^{2}+x_{43}^{2}+x_{44}^{2}+\ldots+x_{Lk}^{2}$$

¿

$$Assim:\left\{c¿\sum_{i=1}^{L}x_{2i}=\sum x_{2i}=x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+\ldots+x_{2,k-1}+x_{2,k}¿d¿\sum_{j=1}^{k}x_{j3}=\sum x_{j3}=x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+\ldots+x_{k-1,3}+\right.$$

Exercícios Somatórios:

1. Indique verdadeiro ou falso para cada uma das expressões abaixo:

a. ( ) $\sum_{i=0}^{200} i^3=\sum_{i=1}^{200} i^3$;

b. ( ) $\sum_{p=0}^{1000}(3+p)=3+\sum_{p=0}^{1000} p$;

c. ( ) $\sum_{l=1}^{n}(3l)=3*\sum_{l=1}^{n} l$;

d. ( ) $\sum_{k=0}^{12} k^p=\left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$;

e. ( ) $\sum_{p=8}^{32}(3+p)=75+\sum_{p=8}^{32} p$

2. Calcular usando a propriedade telescópica:

a) $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$

b) $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i*(i-1)}$

c) $\sum_{j=10}^{500}\frac{1}{j*(j+1)*(j+2)}$, percebendo que

$$\frac{1}{j*(j+1)*(j+2)}=\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{j*(j+1)}-\frac{1}{(j+1)*(J+2)}\right)$$

3. Dada a tabela abaixo, calcule:

i \ j	1	2	3	4
1	5	-2	0	1
2	2	1	0	-2
3	1	2	4	3

a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$

b) $\sum_{j=1}^{4} x_{3j}$

c) $\sum_{i=1}^{3} x_{i4}$

d) $\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=3}^{4} x_{ij}{}^{3}$

e) $\sum\sum (x_{ij}-1)^2$

4. Sabendo que:

a) $(a+1)^2=a^2+2*a+1$, calcule a soma $S_n=1+2+3+4+\ldots+n$, em função de ***n*** (***n***= nº de termos da soma);

b) $(a+1)^3=a^3+3*a^2+3*a+1$, calcule $S_n^2=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$, em função de ***n***;

c) $(a+1)^4=a^4+4*a^3+6*a^2+4*a+1$, calcule $S_n^3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, em função de ***n***.

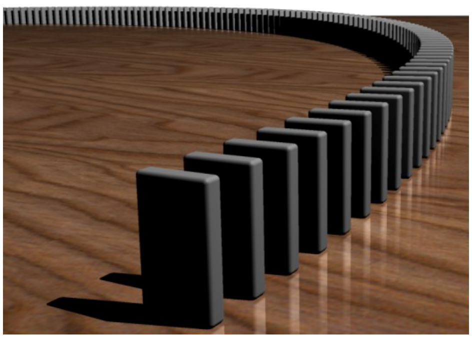
Princípio da indução Finita

Indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições. A forma mais simples e mais comum de indução matemática prova que um enunciado vale para todos os números naturais ***n*** e consiste de dois passos:

- A **base**: mostrar que o enunciado vale para um valor inicial, por exemplo para *n* = 1
- O **passo indutivo**: mostrar que, **se** o enunciado vale para *n* = *k*, então o mesmo enunciado vale **também** para *n* = *k*+1.

Esse método funciona provando que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial, e então provando que o processo usado para ir de um valor para o próximo é válido. Se ambas as coisas são provadas, então qualquer valor pode ser obtido através da repetição desse processo. Para entender por que os dois passos são suficientes, é útil pensar no efeito dominó: se você tem uma longa fila de dominós em pé e você puder assegurar que:

1. O primeiro dominó cairá.
2. Sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá.
3. Então você pode concluir que *todos* os dominós cairão.



Exemplo 1. Soma dos ***n*** primeiros números naturais.

Considere a sentença seguinte sobre os naturais:

$P(n)$: 1 + 2 + 3 + ...+ n - 1 + n = $\frac{(1+n)*n}{2}$.

Note que *P*(1): 1 = $\frac{1*(1+1)}{2}$ é verdadeira.

Agora vamos supor que <u>***se*** a fórmula é verdadeira para n = k</u>, ou seja:

P($\boldsymbol{k}$) : 1 + 2 + 3 + ...+ k - 1 + k = $\frac{(1+k)*k}{2}$ (**H**) $\rightarrow H\,de\,H\,ipóstese.$

Então agora vamos provar que <u>ela seria ***também*** verdadeira para n = k+1</u> :

P($\boldsymbol{k}$+$\mathbf{1}$) : 1 + 2 + 3 + ...+ k + (k +1) = $\frac{(1+k+1)*(k+1)}{2}$ = $\frac{(k+2)*(k+1)}{2}$ (**T**) $\rightarrow T\,de\,T\,ese.$

Ou seja, devo sair da minha hipótese (**H**) e tentar chegar até minha tese (**T**).

Perceba que se em (**H**) eu somar o valor (k+1), já tenho o que quero do lado esquerdo da equação (**T**), basta ajeitar o lado direito:

1 + 2 + 3 + ...+ k - 1 + k + (k +1) = $\frac{(1+k)*k}{2}$ + (k +1) = (k +1)* $\left(\frac{k}{2}+1\right)$ = $\frac{(k+2)*(k+1)}{2}$ (**T**)

O que estabelece a veracidade de P($\boldsymbol{k}$+$\mathbf{1}$).

Exemplo 2: Vamos provar que 3 divide 5^n+2*11^n , para todo *n* N.

De fato, para *n* = 1, temos que 3 divide 5^1 + 2*11^1 = 27.

Suponha, agora, que, para algum *k* ≥ 1, saibamos que 3 divide 5^k+2*11^k .

Logo, existe um número inteiro a tal que:

$$5^k+2*11^k = 3*a$$

Multiplicando por 5 ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$5*\left(5^k+2*11^k\right) = 3*5*a \iff 15*a = 5^{k+1}+10*11^k = 5^{k+1}+22*11^k-12*11^k = 5^{k+1}+2*11*11^k-12*11^k = 5^{k+1}+2*11^{k+1}-12*11^k$$

. Daí segue a igualdade:

$$5^{k+1}+2*11^{k+1} = 15*a + 12*11^k$$

Cujo segundo membro é divisível por 3 por ser igual a 3*(5*a +4*11^k).

Assim, provamos que 3 divide $5^{k+1}+2*11^{k+1}$, o que, pelo Princípio da Indução Infinita, acarreta que 3 divide 5^n+2*11^n , para todo número natural *n*.

Princípio Geral da Indução: Por exemplo, se quisermos provar um enunciado, não para todos os números naturais, mas apenas para todos os números maiores que ou iguais a um determinado número *b*, então os seguintes passos são suficientes:

1. Mostrar que o enunciado vale quando *n* = *b*.
2. Mostrar que se o enunciado vale para todo natural *b* < *n* ≤ *k*, então o mesmo enunciado também vale para *n* = *k* + 1.

Exemplo 3: Seja a seguinte sequência definida como:

a) Os dois primeiros termos são a_1 = 1 e a_2 = 3;

b) Cada um dos termos seguintes é definido como sendo igual à soma dos dois termos anteriores, isto é: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.
Assim os primeiros termos desta sequência serão: 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

c) Queremos demostrar que $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

De fato, temos que $a_1 = 1 < \frac{7}{4}$; e $a_2 = 3 = \frac{48}{16}$ ¿ $\left(\frac{7}{4}\right)^2$.

Seja então $n \geq 2$ e suponhamos agora que vale para todo inteiro positivo menor ou igual a $\boldsymbol{k}$. Queremos então provar que $a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$.

Da hipótese de indução a afirmação vale para $n = k$ e $n = k$ -1. Logo, temos:

$$a_k \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k \text{ (I) e } a_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \text{ (II).}$$

Somando as inequações (I) e (II) teremos:

$$a_k + a_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \quad \text{(III)}$$

Mas, sabemos do enunciado por b) que: $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Logo, substituindo em (III), temos:

$$a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{11}{4}\right) \text{ . (IV)}$$

Mas como $\frac{11}{4} = \frac{11*4}{4*4} = \frac{44}{16} \leq \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$. Podemos reescrever (IV) como:

$$a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \iff a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} .$$

Exemplo 4: Prove que uma soma arbitrária de $n \geq 8$ centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

Solução. Como 8 = 3+5, então a operação é possível para 8. Suponha que *m* > 8 centavos possam ser pagos. Então, será necessário provar que *m* +1 centavos podem ser pagos dessa maneira.

Se a soma de *m* centavos foi paga utilizando pelo menos uma moeda de 5 centavos, então substitua esta moeda de 5 centavos por duas de 3 centavos e a quantia final será *m* + 1 centavos.

Caso contrário, a soma de *m* centavos foi paga somente com moedas de 3 centavos e, como *m* >8, há ao menos três moedas de 3 centavos. Troque então três moedas de 3 centavos por duas de 5 centavos e novamente a quantia final de *m* +1 centavos desejada foi obtida.

Exemplo 5. A sequência (a_i) é definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Encontre uma fórmula explícita para o $\boldsymbol{n}$-ésimo termo dessa sequência.

Solução. Vamos calcular alguns termos iniciais na busca de algum padrão para a fórmula explícita, aquela que depende apenas de $\boldsymbol{n}$ e não mais de outros termos.

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3,$$
$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7,$$
$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15,$$
$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 7 = 31.$$

O que os números 0, 1, 3, 7, 15, 31 têm de especiais? Uma olhadinha cuidadosa nos faz perceber que todos eles são potências de 2, menos 1. Mais especificamente

$$a_3 = 3 = 2^2 - 1,$$
$$a_4 = 7 = 2^3 - 1,$$
$$a_5 = 15 = 2^4 - 1,$$
$$a_6 = 31 = 2^5 - 1.$$

Portanto, nossa conjectura (sinônimo formal para "chute") será que $a_n = 2^{n-1} - 1$.

Somente agora (após a conjectura feita) aplicaremos a ideia de indução, que só conseguirá provar a fórmula caso ela seja verdadeira (caso fosse falsa, o processo de indução encontraria um obstáculo intransponível em algum momento).

Os casos iniciais já estão escritos e validam a conjectura. Em seguida, vamos supor que tenhamos a fórmula válida para todo n $\le$ k (indução forte). Em particular, estamos supondo para k−1 e k...

$$a_{k-1} = 2^{k-2} - 1$$
$$a_k = 2^{k-1} - 1. \text{ Daí,}$$
$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3*(2^{k-1} - 1) - 2*(2^{k-2} - 1) = 3*2^{k-1} - 3 - 1*2^{k-1} + 2 = 2*2^{k-1} - 1,$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{a_{k+1} = 2^k - 1.}$$

Exercícios Indução:

01. Usando o princípio da indução, demonstre que para todo n inteiro positivo vale:
$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$. Explique geometricamente esta igualdade.

02. Mostre, por indução, que se n é um inteiro positivo então $7^n - 1$ é divisível por 6.

03. Prove o critério de divisibilidade por 11, isto é, um número n Natural é divisível por 11 se a soma de seus algarismos de ordem par, menos a soma de seus algarismos de ordem ímpar for um múltiplo de 11.

04. Mostre, por indução, que $2^n > n^2$, para $n \ge 5$.

05. Sabendo que a é solução da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$, podemos afirmar que:

(a) $a + \frac{1}{a}$ é irracional.
(b) a não é um número real.
(c) $a^n + \frac{1}{a^n}$ é inteiro para todo n inteiro
(d) $a^n + \frac{1}{a^n}$ é irracional p/ algum n inteiro

06. (Universidade de Moscou) Demonstre que os primeiros mil algarismos após a vírgula no desenvolvimento decimal de $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1979}$ são todos iguais a 9.

07. Se a sequência (F_n) é definida por $F_1 = 1$; $F_2 = 1$ e, para $n \ge 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, então:
(a) $F_{10} = 89$
(b) F_6 é múltiplo de 6
(c) $F_7^2 + 1 = F_6F_8$
(d) $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{12} + 1 = F_{14}$
(e) Todos os itens anteriores são falsos.

Exercícios de Olimpíadas:

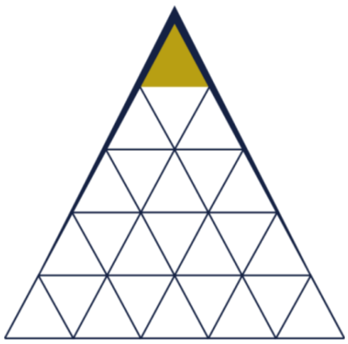
1. **(Simulado ITA)** Se $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $|x|<1$, então $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ é igual a:

2. **(OBM 1985)** a) sejam a, b, c, d inteiros tais que $ad \neq bc$. Demonstre que é sempre possível escrever a fração $\frac{1}{(ax+b)*(cx+d)}$ sob a forma $\frac{r}{ax+b}$ + $\frac{s}{cx+d}$.

b) Encontre a soma $\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+\ldots+\frac{1}{2998*3001}$

3. O símbolo do Banco Alpha, é um triângulo equilátero formado pelo empilhamento de 5, 4, 3, 2 e 1 triângulos equiláteros menores, conforme figura abaixo.

a) Quantos triângulos equiláteros (“de pé”), ou seja, apontados para cima como o destacado na figura abaixo, de qualquer dimensão, podem ser vistos na figura abaixo?



b) Quantos triângulos equiláteros (“de pé” ou invertidos) de qualquer dimensão podem ser vistos na figura acima?

c) Quantos triângulos equiláteros teria um triângulo formado semelhantemente ao anterior só que com n triângulos menores em sua base?

4. Quantos quadrados têm como vértices pontos num quadriculado 10 x 10?

5. **(OBM – 1982)** Seja k um número inteiro positivo. Quantos quadrados distintos existem de lados não necessariamente paralelos aos eixos cartesianos, cujos vértices pertencem ao conjunto $\{(m,n)\, tal\, que\, m, n\, inteiros, 0 \le m \le k, 0 \le n \le k\}$?

6. **(Eliminatoire Francaise 2015)** - Une grille est formeé de 5 droites horizontales et 6 droites verticales. Déterminer le nombre de rectangles donc chacun des côtés est inclus dans l’une de ces droites.

7. Seja uma grade quadriculada n x n, n N num eixo cartesiano. Prove que o número de retângulos com vértices nos pontos da grade e com lados paralelos aos eixos cartesianos é dado pela fórmula:

Nº de retângulos = $S_n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ = $\left(\frac{(n-1)*n}{2}\right)^2$

8. **(OBM 2015)** Sabendo que

$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\quad=\frac{\pi^2}{6}$, então $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{1^2 2^2}+\frac{1}{2^2 3^2}+\frac{1}{3^2 4^2}+$

é igual a:

A) $\frac{\pi^2}{6}-1$ **B)** $\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$ **C)** $\frac{\pi^2}{3}-3$ **D)** $\frac{\pi^2}{3}+1$ **E)** $\frac{\pi^4}{9}-2$

08. (OBM 2013) O número e, uma das constantes mais importantes da Matemática, pode ser definido por:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

em que 0! = 1 e $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ para $n > 0$.

Então o número $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\frac{1^2}{0!}+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots$ é igual a

A) $2e$ **B)** $4e$ **C)** $5e$ **D)** e^2 **E)** $(e+1)^2$

09. (OBM 1985 – Banco) Calcule o somatório $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}*2^{-k}$ para qualquer inteiro positivo $\boldsymbol{n}$.

10. (Olimpíada Paulista) Seja $\boldsymbol{n}$ um inteiro maior que **2**. Se $\boldsymbol{c}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo e ***a*** e ***b*** são seus catetos, mostre que $c^n > a^n + b^n$.

11. (OBM 1983) a) Prove que 1 $\leq\sqrt[n]{n}\leq 2$ **,** sendo $\boldsymbol{n}$ natural.

a) Encontre o menor $\boldsymbol{k}$ tal que $1\leq\sqrt[n]{n}\leq k$, para todo $\boldsymbol{n}$ natural.

12. (Colômbia 2012) Vanessa escreveu 2012 números no caderno seguindo as seguintes regras:

- O primeiro número escrito foi o 2;
- Do segundo número em diante, ela escrevia o número anterior somado com o maior divisor do mesmo, exceto ele próprio. Por exemplo, se ela escrevesse o número 123 em algum momento, então o próximo número seria 123+41=164, pois o número 41 é o maior divisor de 123, diferente do próprio 123.

Qual foi o último número que ela escreveu?

13. Representando por $\lfloor x\rfloor$ a parte inteira do real x, isto é, o maior número inteiro que é menor que ou igual a x e por $\{x\}$ o inteiro mais próximo do real x, determine:

(a) $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor$.

(b) $\lfloor\sqrt[3]{1}\rfloor+\lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor+\lfloor\sqrt[3]{3}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt[3]{n^3-1}\rfloor$.

14. (OMEBA 2016 – Nível 3 - Adaptada) O conteúdo multiplicativo de um conjunto é o produto de seus elementos. Caso o conjunto possua um único elemento, seu conteúdo multiplicativo é este único elemento e, caso o conjunto seja vazio, seu conteúdo multiplicativo é 1. Por exemplo, o conteúdo multiplicativo de {1, 2, 3} é 1*2*3 = 6.

- Determine a soma dos conteúdos multiplicativos de todos os subconjuntos de {1, 2, 3, 4}.
- Prove que a soma dos conteúdos multiplicativos de todos os subconjuntos de {1, 2 , 3 , 4, ..., $\boldsymbol{n}$} é $(\boldsymbol{n}+1)!$
- Determine a soma dos conteúdos multiplicativos de todos os subconjuntos de:

$$\left\{1,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ldots,\ \frac{1}{2015}\ ,\ \frac{1}{2016}\right\}$$

15. (OBM 2003 – Nível 3 – 2ª Fase) Calcule a soma:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \frac{2^3}{3^4+1} + \frac{2^4}{3^8+1} + \ldots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

16. (POTI) Calcule a Soma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$

17. (OBM 2013 – Nível 3 – 2ª Fase) Observe que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Assim, podemos calcular a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \ldots = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = 1$$

Sabendo que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

o valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{1*2^2} + \frac{1}{2*3^2} + \frac{1}{3*4^2} + \ldots$

É da forma $A - \frac{\pi^2}{B}$, com A e B inteiros positivos. Determine o valor de $A + B$.