

**Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR**  
Curso de Combinatória, Nível 3  
1º semestre de 2019

Marcel Thadeu de Abreu e Souza  
Vitor Emanuel Gulisz

## Probabilidade

Começemos com um exemplo muito simples: considere um dado cujas faces são numeradas de 1 a 6. Quando jogamos o dado, existem 6 possibilidades para o número que irá aparecer na face superior. O conjunto de todas as possibilidades neste caso é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e chamamos  $\Omega$  de espaço amostral ( $\Omega$  lê-se “ômega”). Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados de eventos. Por exemplo,  $A = \{2, 3, 5\}$  é o evento que corresponde ao número da face superior ser primo.

Se considerarmos que todos os números são igualmente prováveis de aparecerem na face superior, a probabilidade de obter um certo número ao jogar o dado é  $\frac{1}{6}$ . Além disso, para um evento qualquer  $E$  deste exemplo, a probabilidade de  $E$  ocorrer é dada por

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Portanto, a probabilidade do evento  $A = \{2, 3, 5\}$  ocorrer é  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Em geral, em um experimento aleatório qualquer temos que:

O conjunto de todos os possíveis resultados do experimento é chamado de espaço amostral e é denotado por  $\Omega$ .

Evento é um subconjunto do espaço amostral.

O conjunto de todos os eventos é o conjunto de todos os subconjuntos de  $\Omega$ . Este é conhecido como o conjunto das partes de  $\Omega$  e é denotado por  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Lembre que se  $\Omega$  possui  $n$  elementos, então  $\mathcal{P}(\Omega)$  possui  $2^n$  elementos.

Dizemos que um espaço amostral é **equiprovável** se todos os elementos de  $\Omega$  possuem a mesma probabilidade de ocorrer. No exemplo acima, estávamos tratando de um espaço equiprovável.

Agora vamos ver como definimos e calculamos a probabilidade de um certo evento ocorrer:

**Definição 1.** *Seja  $\Omega$  um espaço amostral. Uma função  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  é chamada uma probabilidade se satisfaz*

1.  $P(\emptyset) = 0$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3. Se  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  e  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Proposição 1.** *Se  $\Omega$  é um espaço amostral equiprovável com uma quantidade finita de elementos e  $E \subset \Omega$  é um evento, então*

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

*Demonstração.* Suponha que  $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$  possui  $n$  elementos ( $n \neq 0$ ). Temos que  $P(\{a_i\}) = q$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , onde  $q \in [0, 1]$  é um número. Note que

$$\Omega = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

e logo

$$P(\Omega) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}).$$

Pela definição dada anteriormente obtemos que  $P(\Omega) = 1$  e

$$P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}).$$

Assim, como  $P(\{a_i\}) = q$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  concluímos que

$$\begin{aligned} 1 &= q + q + \dots + q \\ &= nq \end{aligned}$$

e, portanto,  $q = \frac{1}{n}$ , ou seja,  $P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Agora tome um evento  $E$  qualquer de  $\Omega$ . Seja  $|E| = k$  e escreva  $E = \{b_1, \dots, b_k\}$ . Note que  $b_i = a_j$  para algum  $j$  (apenas mudamos a notação para trabalharmos com os elementos de  $E$  com mais facilidade). Assim temos que

$$\begin{aligned} P(E) &= P(\{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \dots \cup \{b_k\}) \\ &= P(\{b_1\}) + P(\{b_2\}) + \dots + P(\{b_k\}) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}, \end{aligned}$$

ou seja,  $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ , como queríamos. □

Note que, em geral, se  $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$  e  $P(\{a_i\}) = p_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ . Além disso, se  $E \subset \Omega$  é um evento, então  $P(E) = \sum_{a_i \in E} p_i =$  soma dos  $p_i$  tais que  $a_i \in E$ .

A seguir apresentamos algumas proposições simples e importantes. Para isso, vamos considerar um espaço amostral  $\Omega$  qualquer com uma probabilidade  $P$  (uma função que satisfaz a definição dada anteriormente). Sejam também  $A, B \subset \Omega$  eventos quaisquer.

**Proposição 2.**  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

**Proposição 3.** Se  $A \subset B$  então  $P(A) \leq P(B)$ .

**Proposição 4.**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  (*regra do OU*).

Demonstrar estas proposições é um bom treino de raciocínio lógico. Tente demonstrá-las!

**Exemplo 1.** Tanise possui uma urna com 4 bolas amarelas e 5 vermelhas. Ela retira uma bola de cada vez, sem reposição. Qual é a probabilidade das 2 primeiras serem amarelas?

**Solução:** Perceba que o nosso espaço amostral é  $\Omega = \{(B_1, B_2) : B_1 \neq B_2\}$ , onde  $B_1$  e  $B_2$  representam a primeira e a segunda bola retirada da urna, respectivamente.

Ao retirar a primeira bola da urna, teremos  $5 + 4 = 9$  possibilidades. Ao retirar a segunda bola, só haverá 8 possibilidades, visto que uma bola já foi removida. Então:

$$|\Omega| = 9 \cdot 8 = 72.$$

Como queremos que as duas primeiras bolas sejam amarelas, temos que há 4 possibilidades para a primeira bola, e 3 para a segunda, visto que já removemos uma bola amarela. Então:

$$|E| = 4 \cdot 3 = 12.$$

Logo, temos que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}.$$

□

Problemas recomendados: 1, 2, 3, 4, 5 e 6

## Probabilidade Condicional

Voltemos ao primeiro exemplo que apresentamos, do lançamento de um dado não-viciado. Considere o evento  $A = \{2, 3, 5\}$  que corresponde a obter um número primo. Vimos que ao jogar o dado,  $P(A) = \frac{1}{2}$ . Agora imagine a seguinte situação: seu amigo lança o dado sem que você veja o resultado, e lhe conta que o número obtido é ímpar. Assim, você se pergunta, qual é a probabilidade desse número ser primo?

Bom, como o resultado é um número ímpar, temos as seguintes possibilidades:  $\{1, 3, 5\}$ . Veja que esse é o nosso novo espaço amostral e, portanto, o evento do número ser primo corresponde ao conjunto  $\{3, 5\}$ . Assim, a probabilidade do número ser primo é  $\frac{2}{3}$ .

Note que obtemos probabilidades diferentes para o número obtido no lançamento do dado ser primo. Isso ocorreu porque na nossa situação imaginária nós havíamos a informação a mais de o número ser ímpar. Sendo assim, sempre que incluímos mais informações a um problema, a probabilidade de um evento ocorrer pode mudar. Vejamos agora como podemos concretizar esta ideia matematicamente:

**Definição 2.** Dados dois eventos  $A, B \subset \Omega$ , a probabilidade condicional de  $A$  sabendo que  $B$  ocorreu é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que se  $\Omega$  é um espaço finito e equiprovável, então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Também veja que pela definição acima obtemos que  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ . Este resultado é conhecido como **regra do E**.

Quando  $P(A|B) = P(A)$ , ou seja, quando o fato de ocorrer  $B$  não altera a probabilidade de ocorrer  $A$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **eventos independentes**. Neste caso vale que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A).$$

**Exemplo 2.** Alexandre jogou um dado duas vezes. Qual é a probabilidade de Alexandre ter obtido um 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados é 7?

**Solução 1:** O espaço amostral  $\Omega$  é dado por  $\Omega = \{(a, b) | 1 \leq a, b \leq 6\}$ . Sejam  $A$  o evento que corresponde a obter um 3 na primeira jogada e  $B$  o evento que corresponde a soma dos resultados ser 7. Temos que:

$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\},$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

O que queremos calcular é  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . Como  $\Omega$  é um espaço finito e equiprovável,

segue que  $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{6}$ , pois  $A \cap B = \{(3, 4)\}$ .

□

Note que seguimos exatamente a Definição 2 para resolver este problema. Porém, podemos resolver o problema utilizando outro ponto de vista, considerando que o espaço amostral  $\Omega$  é  $B$  e  $A \cap B$  é um evento de  $B$ , e assim calculamos  $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$ . Veja a solução 2 abaixo:

**Solução 2:** Como sabemos que a soma dos resultados é 7, nosso espaço amostral fica reduzido ao seguinte:

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Se o conjunto  $A$  corresponde ao evento de obter um 3 na primeira jogada, então temos  $A \cap B = \{(3, 4)\}$ . Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento  $A$  sabendo que  $B$  ocorreu é

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{6}.$$

□

**Exemplo 3.** Zequinha lança uma moeda três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de se obter duas caras, sabendo que:

- em pelo menos uma das vezes deu cara?
- no primeiro lançamento deu cara?

**Solução:**

a) Representando  $K$  para cara e  $C$  para coroa, temos que:

$$\Omega = \{KCC, KKC, KCK, KKK, CKC, CKK, CCK\}.$$

Destas possibilidades, apenas três são favoráveis:

$$E = \{KKC, KCK, CKK\}.$$

Logo, segue que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{7}.$$

b) Nosso espaço amostral agora é:

$$\Omega = \{KCC, KKC, KCK, KKK\}.$$

Apenas dois são favoráveis:

$$E = \{KKC, KCK\}.$$

Logo, segue que:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

**Exemplo 4.** *Marcel e Vitor estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Na primeira travessa há 3 coxinhas e 5 esfirras, e na segunda há 2 risoles e 4 coxinhas. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual é a probabilidade de se ter pegado uma coxinha?*

**Solução:** Sejam  $T_1$  o evento que corresponde a escolher a primeira travessa,  $T_2$  o evento que corresponde a escolher a segunda, e  $C$  o evento que corresponde a pegar uma coxinha. Queremos calcular quanto vale  $P(C)$ . Para isso, note que

$$P(C) = P((C \cap T_1) \cup (C \cap T_2)) = P(C \cap T_1) + P(C \cap T_2),$$

pela regra do **OU**, pois  $(C \cap T_1) \cap (C \cap T_2) = \emptyset$  e  $P(\emptyset) = 0$ .

Sabemos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B),$$

logo obtemos que:

$$P(C \cap T_1) = P(C|T_1) \cdot P(T_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$

$$P(C \cap T_2) = P(C|T_2) \cdot P(T_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Portanto, } P(C) = \frac{3}{16} + \frac{1}{3} = \frac{25}{48}.$$

□

Veja que fizemos uma explicação bem detalhada, porém na prática é comum omitir todos estes detalhes, fazendo simplesmente uma conta do tipo

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{25}{48}.$$

Mas cuidado, só faça uma solução direta como esta se você souber exatamente o está fazendo, pois é fácil se enganar e chegar em uma resposta errada.

**Exemplo 5.** *A probabilidade de um homem ser canhoto é  $\frac{1}{10}$ . Qual é a probabilidade de, em um grupo de 10 homens, haver pelo menos um canhoto?*

**Solução:** Neste exemplo usaremos a Proposição 2, que irá facilitar muito a resolução. Seja  $A$  o evento que corresponde a pelo menos um dos homens do grupo ser canhoto. Temos que  $P(A) = 1 - P(A^c)$ , então basta calcularmos  $P(A^c)$ .

O evento  $A^c$  corresponde a nenhum dos homens serem canhotos. A probabilidade de não ser canhoto é  $\frac{9}{10} = 0,9$ . Vamos dar um número a cada um dos homens: assim temos o Homem 1, Homem 2, ..., Homem 10. Seja  $H_j$  o evento que corresponde ao Homem  $j$  não ser canhoto. Temos que  $P(H_j) = 0,9$ , como vimos acima. Veja que os eventos  $H_1, H_2, \dots, H_{10}$  são independentes, logo vale que:

$$P(A^c) = P(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{10}) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot \dots \cdot P(H_{10}),$$

e assim,

$$P(A^c) = (0,9) \cdot (0,9) \cdot \dots \cdot (0,9) = (0,9)^{10}.$$

Portanto,  $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (0,9)^{10} \approx 65\%$ .

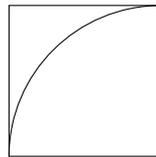
□

Problemas recomendados: 7, 8 e 9

## Probabilidade Geométrica<sup>1</sup>

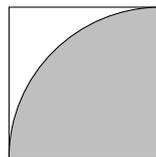
Nesta sessão iremos apresentar problemas em que o espaço amostral é infinito, podendo ser um conjunto de pontos em um segmento de reta, ou o conjunto de uma figura bidimensional, por exemplo. Vamos começar com um exemplo para desenvolver a intuição sobre esse tema.

**Exemplo 6.** *Diego desenhou no chão a seguinte figura:*



Um quadrado com  $\frac{1}{4}$  de um círculo dentro dele (setor circular), de modo que o raio do círculo é igual ao lado do quadrado. Em seguida, Diego lança uma moeda aleatoriamente dentro do quadrado. Considerando que o tamanho da moeda é desprezível, ou seja, não iremos nos preocupar com o seu tamanho (pense que ela equivale a um ponto), qual é a probabilidade da moeda cair dentro do setor circular?

**Solução:** O espaço amostral neste caso é o conjunto de pontos dentro do quadrado. Seja  $E$  o evento da moeda cair dentro do setor circular. Então o evento  $E$  indica que a moeda deve cair na seguinte região:



Observe que não podemos simplesmente contar a quantidade de pontos, pois há uma infinidade. Iremos então considerar a área do quadrado e a área do setor circular. Assim, teremos que

$$P(E) = \frac{\text{área do setor circular}}{\text{área do quadrado}}.$$

---

<sup>1</sup>Este é um assunto extra, que não é muito mencionado quando se ensina Probabilidade, porém é muito interessante, e vale a pena dar uma olhada!

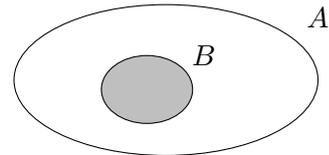
Agora basta fazer as contas. Se  $l$  é a medida do lado do quadrado, temos *área do quadrado* =  $l^2$  e *área do setor circular* =  $\frac{\pi l^2}{4}$ . Deste modo,

$$P(E) = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 = 78,5\%$$

□

Em geral, se em um experimento aleatório o espaço amostral é uma região do plano, digamos a região  $A$ , e um evento  $E$  corresponde a uma região dentro de  $A$ , digamos a região  $B$  ( $B \subset A$ ), então a probabilidade de  $E$  ocorrer é

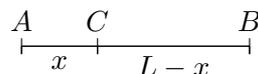
$$P(E) = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$



Podemos usar um raciocínio análogo para casos em que o espaço amostral é uma região unidimensional (em que não podemos calcular área). Vamos ver um exemplo para depois fixar a ideia apresentada.

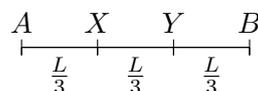
**Exemplo 7.** *Seja  $\overline{AB}$  um segmento de reta de comprimento  $AB = L$ . Se um ponto  $C$  interior ao segmento  $\overline{AB}$  for escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comprimento do menor dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$  seja superior a  $\frac{L}{3}$ ?*

**Solução:** Tomando um ponto  $C$  aleatoriamente em  $\overline{AB}$ , temos  $AC = x$  e  $CB = L - x$ .



Note que o espaço amostral  $\Omega$  corresponde ao intervalo  $]0, L[$  (todas as possibilidades para  $x$ ), já que para cada ponto  $C$  escolhido podemos associar um elemento  $x \in ]0, L[$ , e para cada  $x \in ]0, L[$  podemos associar um ponto  $C$  interior a  $\overline{AB}$ . Resumindo, existe uma bijeção entre  $\Omega$  e  $]0, L[$ .

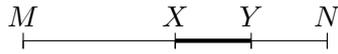
Seja  $E$  o evento que corresponde ao comprimento do menor dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$  ser superior a  $\frac{L}{3}$ . Então  $E$  ocorrer significa ter  $\min\{x, L - x\} > \frac{L}{3}$ . Logo  $E$  é o evento em que  $x > \frac{L}{3}$  ou  $L - x > \frac{L}{3} \Leftrightarrow x < \frac{2L}{3}$ , ou seja,  $\frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}$ . Portanto,  $E$  ocorre se  $C$  está dentro do segmento  $\overline{XY}$ :



$$\text{Assim, } P(E) = \frac{XY}{AB} = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}.$$

□

Agora vamos ver como podemos generalizar esta ideia: suponha que o espaço amostral corresponde a um intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ ,  $I = [a, b]$ . Geometricamente,  $I$  corresponde a um segmento de reta, digamos o segmento  $\overline{MN}$ . Note que  $\overline{MN}$  tem comprimento  $MN = b - a$ . Se um evento  $E$  corresponde a um intervalo  $J \subset I$ , digamos  $J = [c, d]$ , geometricamente,  $J$  é um segmento de reta  $\overline{XY}$  em que os pontos  $X$  e  $Y$  são interiores a  $\overline{MN}$ .



Sendo assim, para calcular  $P(E)$  é muito simples, basta fazermos

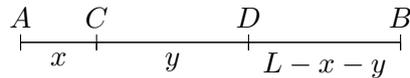
$$P(E) = \frac{XY}{MN} = \frac{b-a}{d-c}.$$

Note que no exemplo anterior tínhamos  $I = ]0, L[$  e  $J = ]L/3, 2L/3[$ . Veja que removemos os pontos extremos de cada intervalo, mas isso não irá causar mudanças no resultado, pois como há uma infinidade de pontos, esses poucos pontos que retiramos são desprezíveis para os cálculos.

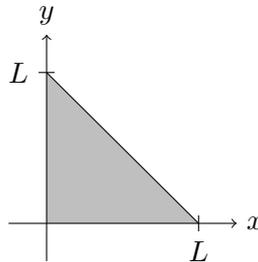
Feita a teoria sobre probabilidade geométrica, agora vamos ver um problema sobre este tema:

**Exemplo 8.** *Dividindo aleatoriamente um segmento  $\overline{AB}$  em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?*

**Solução:** Primeiramente, indicaremos o comprimento de  $\overline{AB}$  por  $AB = L$ . Bom, dividir  $\overline{AB}$  em três partes equivale a tomar dois pontos  $C$  e  $D$  interiores a  $\overline{AB}$ . Obtendo estes dois pontos de modo aleatório, teremos três segmentos determinados,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DB}$  com comprimentos  $AC = x$ ,  $CD = y$  e  $DB = L - x - y$ .



Note que o espaço amostral deste experimento corresponde aos pares  $(x, y)$ , onde  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $L - x - y > 0 \Leftrightarrow y < L - x$ . Assim, o espaço amostral  $\Omega$  corresponde à seguinte região do plano:



O evento  $E$  que estamos interessados em calcular a probabilidade é o conjunto dos pares  $(x, y) \in \Omega$  tais que é possível formar um triângulo de lados  $x$ ,  $y$  e  $L - x - y$  (lembre-se que  $E$  é um subconjunto do espaço amostral). Para descrever melhor este conjunto  $E$  vamos utilizar o seguinte resultado:

Existe um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  se, e somente se,

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

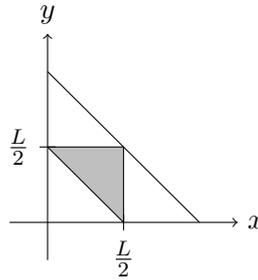
Sendo assim, é possível formar um triângulo de lados  $x$ ,  $y$  e  $L - x - y$  se, e somente se,

$$x < y + (L - x - y)$$

$$y < x + (L - x - y)$$

$$L - x - y < x + y$$

o que equivale a  $x < \frac{L}{2}$ ,  $y < \frac{L}{2}$  e  $y > \frac{L}{2} - x$ . Assim,  $E$  é o conjunto de pares  $(x, y) \in \Omega$  que satisfazem estas desigualdades. Portanto,  $E$  corresponde à seguinte região do plano:



Agora para calcular  $P(E)$ , basta fazermos  $P(E) = \frac{\text{área da região de } E}{\text{área da região de } \Omega}$ , e assim concluímos que  $P(E) = \frac{1}{4}$ .

□

De modo geral, para resolver um problema de probabilidade geométrica envolvendo um evento  $E$ , devemos seguir os seguintes passos:

1. Descrever o espaço amostral  $\Omega$  em função de uma ou mais variáveis  $x, y, \dots$
2. Determinar qual região do plano (ou da reta) corresponde a  $\Omega$ .
3. Descrever os elementos do evento  $E$ .
4. Determinar qual região do plano (ou da reta) corresponde a  $E$ .
5. Calcular as áreas (ou comprimentos) correspondentes a  $\Omega$  e  $E$  e calcular  $P(E)$ .

Note que no item 1 acima, quando descrevemos  $\Omega$  com uma variável  $x$  obtemos um subconjunto da reta, e quando descrevemos  $\Omega$  com duas variáveis  $x$  e  $y$  obtemos um subconjunto do plano. Neste texto nos restringimos apenas a estes casos, mas também podemos ter situações com mais variáveis. Por exemplo, se descrevemos  $\Omega$  com três variáveis  $x, y$  e  $z$ , então obtemos um subconjunto do espaço tridimensional, e neste caso calcularíamos volumes em vez de áreas ou comprimentos.

Problemas recomendados: 16, 17 e 18.

## Problemas

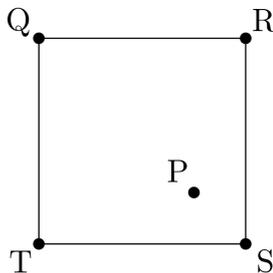
Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

(●)	Fácil
(▲)	Normal
(◆)	Difícil
(★)	Insano

1. (●) Numa urna existem duas bolas vermelhas e seis brancas. Sorteando-se uma bola, qual a probabilidade de ela ser vermelha?
2. (●) Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

3. (●) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?
4. (▲) Um dado de seis faces é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:
- ocorrer número par.
  - ocorrer número maior ou igual a 5.
5. (▲) Qual é a probabilidade de que um número inteiro positivo menor do que 1000 tenha pelo menos um algarismo 1 em sua representação decimal?
6. (▲) Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. Calcule a probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe.
7. (●) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.
- Qual a probabilidade de o número ser par?
  - Qual a probabilidade de o número ser par, dado que ele é menor que 50?
  - Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5, dado que é par?
8. (▲) Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?
9. (▲) Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de  $\frac{8}{10}$ . A probabilidade de que o correio não a perca é de  $\frac{9}{10}$ . A probabilidade de que o carteiro a entregue é de  $\frac{9}{10}$ . Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?
10. (◆) O professor Guilherme criou três estranhas máquinas. A máquina  $A$  transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $\frac{1}{3}$ . A máquina  $B$  transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $\frac{2}{5}$ . A máquina  $C$  transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $\frac{1}{4}$ . E se o animal é um cachorro, nenhuma das máquinas faz transformação alguma.
- O professor Guilherme colocou um gato na máquina  $A$ , depois colocou o animal resultante da máquina  $A$  na máquina  $B$  e, por fim, colocou o animal resultante da máquina  $B$  na máquina  $C$ . Qual a probabilidade de ter saído um cachorro da máquina  $C$ ?
11. (◆) Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

12. (♦) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?
13. (♦) Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocre e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor é  $\frac{1}{2}$ . Quantas faces ocre tem o segundo cubo?
14. (♦) Escolha três números naturais consecutivos e faça a multiplicação entre estes três números. Qual é a probabilidade do número obtido ser divisível por 12?
15. (♦) Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?
16. (♦) Marcel e Vitor escolhem um número real aleatório entre 0 e 1. Marcel afirma que a soma dos dois números é maior que  $\frac{1}{2}$  e Vitor afirma que a soma dos quadrados dos dois números é menor que 1. Qual é a probabilidade de ambos estiverem corretos?
17. (♦) Escolhendo aleatoriamente um número  $\alpha \in [0, 1]$ , qual é a probabilidade do polinômio  $x^2 + x + \alpha$  ter raiz real?
18. (♦) Um ponto  $P$  é escolhido ao acaso no interior de um quadrado  $QRST$ . Qual é a probabilidade do ângulo  $\angle RPQ$  ser agudo?



19. (♦) Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira pessoa a chegar esperará no máximo 15 minutos pela outra. Ache a probabilidade de este encontro realizar-se neste intervalo, admitindo-se que os instantes de chegada (entre 11 e 12 horas) de cada uma das pessoas provêm do acaso.
20. (★) Cem pessoas estão em fila para embarcar em um avião. Cada uma delas possui uma passagem com um assento designado. Entretanto, a primeira pessoa a embarcar perdeu sua passagem e decide sentar em um assento aleatório. Depois disso, cada pessoa senta em seu respectivo assento se ele estiver desocupado, ou em um assento aleatório se ele não estiver. Qual é a probabilidade da última pessoa que embarcar sentar em seu assento designado?
21. (★) Quatro pontos são escolhidos na esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Qual é a probabilidade que a origem esteja dentro do tetraedro determinado por esses quatro pontos?

## Bibliografia

1. C. Shine, *Aula 1 e Aula 16, Curso de Combinatória - Nível 3, Programa Olímpico de Treinamento*. Disponível na Internet.
2. A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. Pinto Carvalho e P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, 1991.
3. E. Wagner, *Probabilidade Geométrica*. RPM, nº 34.
4. N. Tunala, *Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos*. RPM, nº 20.
5. S. Hazzan, *Fundamentos de Matemática Elementar 5, Combinatória e Probabilidade*. Atual Editora, 2004.

## Respostas

- |                      |                     |                          |
|----------------------|---------------------|--------------------------|
| 1. $\frac{1}{4}$     | (b) $\frac{24}{49}$ | 14. $\frac{3}{4}$        |
| 2. $\frac{3}{4}$     | (c) $\frac{1}{5}$   | 15. $\frac{1}{2007}$     |
| 3. $\frac{2}{9}$     | 8. $\frac{1}{2}$    | 16. $\frac{2\pi - 1}{8}$ |
| 4. (a) $\frac{4}{7}$ | 9. $\frac{25}{44}$  | 17. $\frac{1}{4}$        |
| (b) $\frac{11}{21}$  | 10. $\frac{7}{10}$  | 18. $1 - \frac{\pi}{8}$  |
| 5. $\frac{271}{999}$ | 11. $\frac{1}{30}$  | 19. $\frac{7}{16}$       |
| 6. $\frac{13}{25}$   | 12. $\frac{5}{8}$   | 20. $\frac{1}{2}$        |
| 7. (a) $\frac{1}{2}$ | 13. 3               | 21. $\frac{1}{8}$        |