Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR
Curso de Combinatória, Nível 3
1º semestre de 2019

Marcel Thadeu de Abreu e Souza

Princípio da Casa dos Pombos

Proposição 1. *Se distribuirmos $n+1$ pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, dois pombos.*

A proposição enunciada acima é conhecida como o **princípio da casa dos pombos (PCP)**. Apesar de sua simplicidade, ela admite consequências surpreendentes, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. *O princípio da casa dos pombos garante que:*

- *Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas nasceram no mesmo mês.*
- *Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.*
- *Em um grupo de 30 pessoas, pelo menos duas delas terão nomes com a mesma inicial.*
- *Em um grupo de 200 pessoas, pelo menos duas delas terão a mesma idade.*

Exemplo 2. *Uma caixa contém bolas de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas da caixa, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?*

Solução:
Podemos retirar três bolas da caixa. Se não tivesse mais de uma bola de cada cor, só poderiam ter duas bolas. Isto é óbvio e contradiz o fato de que retiramos três bolas. Aqui as bolas fazem o papel dos pombos e as cores (preto e branco) fazem o papel das gaiolas. □

Problemas recomendados: 1, 2 e 3.

É claro que podemos também quantificar melhor a ideia do princípio da casa dos pombos:

Proposição 2. *(Princípio Geral da Casa dos Pombos). Se distribuirmos $nk+1$ ou mais pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $k+1$ pombos.*

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 3. *Prove que, em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.*

Solução:
Tome como gaiolas os sete dias da semana e como pombos as vinte pessoas. A regra para por um pombo em uma gaiola é a seguinte: o dia em que a pessoa nasceu. Estamos colocando 20 "pombos" (pessoas) em 7 "gaiolas" (dias da semana). Como $20 = 7 \cdot 2 + 6$, podemos usar o Princípio Geral da Casa dos Pombos para $n = 7$, $k = 2$. Obtemos que alguma "gaiola" tem que conter pelo menos 3 pessoas. □

Problemas recomendados: 4 e 5.

Problemas

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

(●)	Fácil
(▲)	Normal
(♦)	Difícil
(★)	Insano

1. (●) Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de espinhos.

2. (●) Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

3. (▲) Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

4. (●) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

5. (●) Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove dos engradados contém o mesmo tipo de maçãs.

6. (▲) O plano é totalmente pintado usando duas cores. Mostre que podemos encontrar dois pontos de mesma cor que distam exatamente um metro.

7. (▲) Quinze meninos juntaram 100 nozes. Mostre que dois deles juntaram o mesmo número de nozes.

8. (♦) Em uma festa há n pessoas. Mostre que, nessa festa, podemos achar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de pessoas. Considere que a relação de conhecer alguém é simétrica.

9. (♦) Marcamos, aleatoriamente, cinco pontos no interior de um quadrado de lado 2. Mostre que é sempre possível acharmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor ou igual a $\sqrt{2}$.

10. (♦) Seja o conjunto $A = \{1, 2, \cdots, 19, 20\}$. Qual é a maior quantidade de números do conjunto A que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

11. (♦) Mostre que existem duas potências de dois que diferem por um múltiplo de 2019.

12. (♦) Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. Mostre que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado.

13. (♦) Seja A um conjunto finito e não vazio e seja $f : A \to A$ uma função injetora. Mostre que f é sobrejetora.

14. (♦) Dezenove flechas são arremessadas sobre um alvo com formato de um hexágono regular de lado 1. Mostre que duas destas flechas estão a uma distância de no máximo $\frac{\sqrt{3}}{3}$ uma da outra.

15. (♦) Mostre que todo natural n tem um múltiplo cuja representação decimal contém somente os algarismos 0 e 1.

16. (♦) Em um reticulado quadrado infinito são escolhidos cinco pontos do reticulado. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos que une dois desses pontos também é um ponto do reticulado.

17. (♦) Um cubo de lado 1 contém 2019 abelhas. Mostre que existem três delas dentro de uma esfera de raio $\frac{1}{11}$.

18. (★) Dada uma sequência qualquer de $n^2 + 1$ números reais distintos, mostre que é sempre possível encontrar uma subsequência crescente ou decrescente de $n + 1$ termos.

19. (★) Um conjunto $A \subset \mathbb{Z}_+$ é *bom* se, para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, a equação $x - y = n$ tiver infinitas soluções (x, y), com $x, y \in A$. Se $\mathbb{Z}_+ = \bigcup_{i=1}^{100} A_i$, mostre que ao menos um dos conjuntos A_i é *bom*.

20. (★) Seja A um conjunto de 1985 inteiros positivos, nenhum dos quais tem um divisor primo maior que 26. Mostre que é possível encontrarmos quatro elementos de A cujo produto seja uma quarta potência.

Bibliografia

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

2. MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: combinatória.* 2a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

3. HOLANDA, B. *Aula 7, Curso de Combinatória - Nível 2, Programa Olímpico de Treinamento.* Disponível na Internet.

4. HOLANDA, B. *Aula 8, Curso de Combinatória - Nível 2, Programa Olímpico de Treinamento.* Disponível na Internet.

5. SHINE, C. *Aula 7, Curso de Combinatória - Nível 3, Programa Olímpico de Treinamento.* Disponível na Internet.