

**Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada**  
**Exame de Qualificação de Álgebra Linear Aplicada**  
**14/12/2009**

1. (1,5) Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u^T v \neq 0$ . Pede-se:
  - (a) Obtenha todos os autovalores e autovetores de  $A = I + uv^T$ .
  - (b) Calcule  $\det(A)$ .
2. (1,5) Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não singular. Mostre que se  $A$  tem uma decomposição  $LU$ , então a decomposição é única.
3. (2,0) Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz de posto  $n$ . Mostre que  $\|A(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = 1$ , sendo  $\|B\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Bx\|_2$ .
4. (2,0) Seja  $\|\cdot\|$  uma norma tal que  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  para todo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que:
  - (a) O raio espectral  $\rho(A) \leq (\|A^k\|)^{1/k}$ .
  - (b) Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ , então  $\rho(A) < 1$ .
5. (1,5) Seja  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ . Considere a transformação de Householder  $P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$ . Mostre que  $P$  é inversível.
6. (1,5) Considere a seguinte decomposição  $QR$  de uma matriz  $A$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolva por quadrados mínimos o sistema  $Ax = b$  onde  $b(i) = 1$  para  $1 \leq i \leq 5$ .