MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação: Análise em $\mathbb{R}^n$ (Agosto 2012)

Banca Examinadora:

- Prof. Cristián Ortiz
- Prof. Edson Ribeiro Alvares
- Prof. Higidio Portillo Oquendo

Instruções:

a) A prova tem uma duração de 3 horas;
b) Faça as questões 1, 2 e 3 e escolha UMA entre as questões 4 e 5;
c) Cada questão escolhida vale 2,5 pontos. A prova tem um total de 10,0 pontos;
d) Justifique todas as suas respostas.

Nome do aluno:

Questões

(1) Seja $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

i) Mostre que a função $N : \text{End}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$N(T) := sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|,$$

define uma norma em $\text{End}(\mathbb{R}^n)$.

ii) Considere $\text{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \text{End}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos operadores lineares invertíveis. Prove que se $T \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ e $S \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ são tais que

$$N(S-T)N(T^{-1}) < 1,$$

então $S \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Determine se $\text{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \text{End}(\mathbb{R}^n)$ é aberto, fechado ou nenhuma das anteriores.

iii) Mostre que a função $\text{Aut}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n); T \mapsto T^{-1}$, é contínua.

(2) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ defina a distância de x a A por $d(x, A) := inf_{a\in A}\|x - a\|$.

i) Mostre que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) = 0\}$.

ii) Prove que a função $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d(x, A)$ é uniformemente contínua. Conclua que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se X coincide com o conjunto de zeros de uma função contínua.

iii) Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos fechados disjuntos. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

é contínua, com $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$. Conclua que existem abertos disjuntos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ com $A \subset U$ e $B \subset V$.

(3) Fixado $a = (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ considere o polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais associado a a, isto é

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Suponha que $b \in \mathbb{R}$ é um zero simples de p. Mostre que existem $\eta, \delta > 0$ tais que se $|a'_i - a_i| < \eta$ para cada $i = 0, ..., n$, então o polinômio $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a'_i x^i$ associado a $a' = (a'_0, ..., a'_n)$, possui exatamente um zero simples $b' \in \mathbb{R}$ com $|b - b'| < \delta$. Isto é, zeros simples de um polinômio, dependem de forma C^∞ dos coeficientes.

Escolha uma das seguintes questões

(4) Seja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que $f(B) \subset B$ onde B denota a bola fechada de centro na origem e raio 1. Suponha que $|\mathrm{det} Df(x)| < 1$ para cada $x \in B$. Prove que, para cada função contínua $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{f^n(B)} g(x)dx = 0,$$

onde $f^n = f \circ ... \circ f$ (n-vezes).

(5) Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Considere $a \in U$ tal que $Df(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Prove que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol} f(B[a,r])}{\mathrm{vol} B[a,r]} = |\mathrm{det} Df(a)|.$$

Lembre que o volume está bem definido para conjuntos Jordan mensuráveis. Especificamente, um conjunto limitado $X \subseteq \mathbb{R}^m$ é Jordan mensurável se ∂X tem medida nula. Neste caso, $\mathrm{vol}(X) := \int_A \chi_X$, onde A é um m-retângulo que contém X e $\chi_X : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função característica de X.