UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Exame de qualificação de Otimização I - 15/08/2014

NOME DO ALUNO: ____

Valor de cada questão: 2,0 pontos.

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado. Dado $z \notin S$, mostre que existem $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a^T z > b \qquad \text{e} \qquad a^T x < b \quad \text{para todo } x \in S.$$

Dizemos neste caso que a variedade $H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b \right\}$ separa estritamente z de S. Faça uma figura ilustrativa em $\mathbb{R}^2$.

2. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c.$$

Pede-se:

(a) Mostre que a busca exata na direção $d \in \mathbb{R}^n$, a partir de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, fornece
$$t^* = -\frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{d^T A d}.$$

(b) Mostre que se $d = -\nabla f(\bar{x})$ é um autovetor de A, então uma iteração do algoritmo do gradiente com busca exata, a partir de $\bar{x}$, encontra o minimizador global de f.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$. Considere um ponto inicial arbitrário $x^0 \in \mathbb{R}$ com $f(x^0) \neq 0$. Seja (x^k) a sequência gerada pelo método de Newton para resolver a equação $f(x) = 0$.

   (a) Mostre que $f(x^{k+1}) > 0$, para todo $k \geq 0$;

   (b) Mostre que $x^{k+1} > x^*$, para todo $k \geq 0$;

   (c) Mostre que a sequência (x^k) é decrescente, para $k \geq 1$; ;

   (d) Conclua que $x^k \to x^*$.

4. Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ e $P(S)$ o polar de S. Mostre que $P(S)$ é cone, convexo e fechado.

5. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & Ax = b. \end{array} \tag{1}$$

   Pede-se:

   (a) Mostre que as restrições cumprem alguma condição de qualificação.

   (b) Escreva as condições de KKT para o problema (1).