UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Exame de qualificação de Otimização I - 04/03/2015

NOME DO ALUNO: ____

Valor de cada questão: 2,0 pontos.

1. Considere o problema de minimização irrestrita da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -x_1(x_2+1)^2$$

e sejam os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $\hat{x} = (x_1, -1)^T$. Pede-se:

   (a) Analise as condições de otimalidade de primeira e de segunda ordens para esses pontos.

   (b) O que se pode afirmar a respeito de $\hat{x}$ usando as informações do item anterior?

   (c) Use a expressão da função para fazer afirmações mais conclusivas sobre $\hat{x}$ no problema de minimização irrestrita de f definida acima.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Pede-se:

   (a) Mostre que função f é convexa se, e somente se,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

   para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Conclua que todo ponto estacionário de uma função convexa diferenciável é minimizador global.

3. Considere uma iteração do método da seção áurea de busca unidirecional, na qual o intervalo $[v, b]$ foi descartado, como ilustrado na Figura **??**. Lembre-se que $v = a + \theta(b-a)$ com $\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Considere a função $g : [a, v] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{v-t}{b-t}.$$

Pede-se:

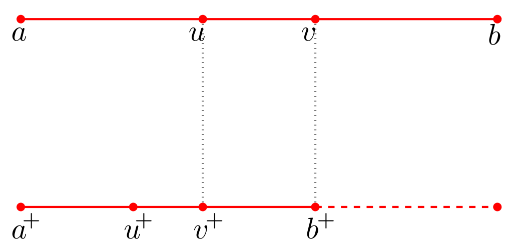

Figura 1: Uma iteração do método da seção áurea.

   (a) Mostre que g é decrescente em seu domínio.

   (b) Mostre que dado $t^* \in [a, v]$,

$$\frac{|b^+ - t^*|}{|b - t^*|} \leq \theta.$$

   (c) Com base no item anterior, qual a taxa de convergência do método da seção áurea?

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Considere o método do gradiente a partir de um certo x^0, com $\nabla f(x^0) \neq 0$. Mostre que:

(a) Se encontramos a solução em uma iteração, então $u = x^1 - x^0$ é um autovetor da Hessiana de f.

(b) Se $x^0 = x^* + v$, com x^* o minimizador de f e v um autovetor de A, então x_1 obtido com a busca exata é a solução do problema, ou seja, $x^1 = x^*$.

5. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & u(x) \leq 0 \\ & v(x) \leq 0, \end{array}$$

onde $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis. Suponha que x^* é uma solução do problema acima que satisfaz uma condição de qualificação. Defina problemas, exibindo funções f, u, v e x^* e esboçando-os graficamente, nos quais isso acontece e:

(a) $u(x^*) = v(x^*) = 0$;

(b) $u(x^*) < 0$ e $v(x^*) = 0$;

(c) $u(x^*) < 0$ e $v(x^*) < 0$;

(d) $u(x^*) = v(x^*) = 0$ e um dos multiplicadores de Lagrange é zero.